

# Implementace plné linearizace matic v semihladké Newtonově metodě pro dynamické kontaktní problémy

Implementation of full linearization  
in semismooth Newton method for  
transient contact problems

## Zadání diplomové práce

Student:

**Bc. Ladislav Foltyn**

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Implementace plné linearizace matic v semihladké Newtonově metodě  
pro dynamické kontaktní problémy  
Implementation of full linearization in semismooth Newton method for  
transient contact problems

Zásady pro vypracování:

V současnosti obsahuje knihovna MatSol vyvíjená na katedře 470 možnost počítat mimo jiné dynamické kontaktní úlohy. Matematický model takovéto úlohy je v algebraickém tvaru úloha kvadratického programování (minimalizace kvadratického funkcionálu) s rovnostními omezeními a nerovnostními omezeními speciálního tvaru. V případě nelineárního materiálu a počítání v přírůstcích, může použití zmíněného přístupu vést k situaci, kdy matice soustavy není pozitivně definitní a nelze proto tímto způsobem úlohu formulovat.

Cestou je v tomto případě přeformulování minimalizace na řešení soustavy nelineárních rovnic a omezujících nerovnostních podmínek na rovnostní omezení, ve kterých se však vyskytují nehladké funkce. K řešení se využívá semihladké Newtonovy metody, ve které je potřeba linearizovat (derivovat) matice tuhosti, a kontaktní matice.

Cílem práce je 2D implementace zmíněného přístupu do knihovny MatSol a srovnání s existujícími benchmarky.

Seznam doporučené odborné literatury:

Disertační práce K. Motýčkové.

M. Merta: Diskretizace a numerická realizace dynamických kontaktních úloh se třením.

A. Popp, M.W. Gee, W.A. Wall: A finite deformation mortar contact formulation using a primal–dual active set strategy.

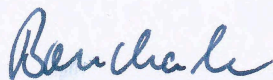
a články v referencích.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Oldřich Vlach, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

vedoucí katedry




prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.

děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2015

  
.....

*Práce je částečně podporována Grantem SGS č. SP2015/100, VŠB – Technická Univerzita Ostrava, Česká Republika.*

Úvodem bych chtěl poděkovat Ing. Oldřichu Vlachovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce a také za jeho čas a vytrvalost při vysvětlování dané problematiky. Dále bych chtěl poděkovat své přítelkyni, rodině a přátelům za důvěru, kterou do mě vkládali během psaní této práce.

## Abstrakt

Na katedře 470 Vysoké Školy Báňské – Technické Univerzitě Ostrava jsou v současnosti kontaktní úlohy řešeny pomocí minimalizace kvadratického funkcionálu s rovnostními omezeními a nerovnostními omezeními speciálního tvaru. Problém vyvstává v případě nelinearity materiálu a počítání v přírůstcích, kdy matice soustavy není pozitivně definitní. Jedním z možných řešení je přeformulování úlohy minimalizace na řešení soustavy nelineárních rovnic a přepsání omezujících nerovnostních omezení na rovnostní omezení, ve kterých se vyskytují nehladké funkce. Tímto způsobem přeformulovanou úlohu můžeme řešit pomocí semihladké Newtonovy metody. V takovém případě je však nutné linearizovat (derivovat) matice tuhosti a kontaktní matice. Naším cílem bude implementace semihladké Newtonovy metody do knihovny MatSol, která je vyvíjena na katedře 470, a srovnání výsledků s existujícími benchmarky.

**Klíčová slova:** Semihladká Newtonova metoda, kontaktní úloha, rovnostní omezení s nehladkou funkcí

## Abstract

At the department 470 of VŠB – Technical University of Ostrava, a contact problems are solved by minimalization of quadratic functional with equality constraints and inequality constraints in a special form. The problem arises at the case when the material is nonlinear and when the matrix of solved system isn't positive definite in increment counting. One of the possible ways is to reformulate minimalization problem into problem of solving nonlinearity system and rewrite inequality constraints to equality constraints containing non-smooth functions. Thus rewritten problem could be solved by semismooth Newton method. In this case, linearizations (derivations) of stiffness matrix and contact matrices are required. Our goal is to implementat semismooth Newton method to MatSol library, which is being developed at the department 470 and to compare results with the existing benchmarks.

**Keywords:** Semismooth Newton method, contact problem, equality constraint with non-smooth function

## Seznam použitých zkratk a symbolů

$n$	dimenze např. $n \in \{2, 3\}$
$\mathbb{R}^n$	prostor reálných čísel dimenze $n$
$v$	skalár
$\underline{x}, \underline{\sigma}$	analytický vektor, tenzor
$\underline{v}$	algebraický vektor
$v_x$	$x$ -ová souřadnice vektoru $\underline{v}$
$v_y$	$y$ -ová souřadnice vektoru $\underline{v}$
$\underline{\underline{A}}$	dvourozměrná matice
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	třírozměrná matice
$\mathbf{X}, \mathbf{F}, \mathbf{x}$	abstraktní prostor, funkce a vektor (např. $\mathbf{X}$ je Banachův prostor, $\mathbf{F}$ je funkce definovaná na tomto prostoru a $\mathbf{x}$ je prvek tohoto prostoru)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	derivace $f$ podle $x$
$\underline{u} \cdot \underline{v}$	skalární součin
$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	vnitřní součin, $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}$ ( $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^\top \underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma \varepsilon}}^\top)$ )
$n_n^{(sl)}$	počet uzlů na kontaktní hranici slave tělesa
$n_n^{(m)}$	počet uzlů na kontaktní hranici master tělesa
$n_n^{(sl,e)}$	počet uzlů na jednom kontaktním slave elementu
$n_n^{(m,e)}$	počet uzlů na jednom kontaktním master elementu
$n_e^{(sl)}$	počet elementů na kontaktním povrchu slave
$n_s$	počet elementů segmentů
$n_g^{(sl,e)}$	počet Gauss bodů na slave elementu
$n_g^{(s)}$	počet Gauss bodů na segmentu
$\#^{(sl)}$	horní index $(sl)$ udává stranu slave tělesa
$\#^{(m)}$	horní index $(m)$ udává stranu master tělesa
$\mathcal{S}$	množina slave uzlů
$\mathcal{A}$	množina aktivních uzlů
$\mathcal{I}$	množina neaktivních uzlů
$\mathcal{M}$	množina master uzlů

$\mathcal{N}$	množina ostatních uzlů (vnitřní uzly a uzly na všech hranicích kromě hranice kontaktní)
$\underline{X}$	referenční souřadnice uzlu (algebraicky)
$\underline{d}$	vektor posunu (algebraicky)
$\underline{x}$	aktuální souřadnice uzlu, pro které platí $\underline{x} = \underline{X} + \underline{d}$ (algebraicky)
$\tilde{\zeta}_a^{(sl)}, \tilde{\zeta}_b^{(sl)}$	koncové body segmentu na slave
$\tilde{\zeta}_a^{(m)}, \tilde{\zeta}_b^{(m)}$	koncové body segmentu na master
$\tilde{\zeta}_g^{(sl)}, \tilde{\zeta}_g^{(m)}$	Gauss body na slave a na master
PDASS	z anglického Primal-Dual Active Set Strategy, tzn. primárně-duální přístup založený na aktivní množině

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Formulace kontaktní úlohy</b>	<b>3</b>
1.1 Diskretizace . . . . .	5
1.2 Konstrukce matice $D$ . . . . .	7
1.3 Konstrukce matice $M$ . . . . .	8
1.4 Diskretizace kontaktního omezení . . . . .	11
1.5 Algebraický tvar diskretizované úlohy . . . . .	11
<b>2 Semihladká Newtonova metoda</b>	<b>12</b>
2.1 Newtonova metoda . . . . .	12
2.2 Semihladká Newtonova metoda . . . . .	13
<b>3 PDASS jako semihladká Newtonova metoda</b>	<b>15</b>
3.1 Linearizace normálového a tečného vektoru . . . . .	18
3.2 Linearizace mortarové matice $D$ . . . . .	22
3.3 Linearizace mortarové matice $M$ . . . . .	25
3.4 Linearizace doplňkové funkce . . . . .	34
3.5 Linearizace tečné složky multiplikátorů . . . . .	36
3.6 Maticový zápis soustavy lineárních rovnic . . . . .	39
3.7 Algoritmus . . . . .	43
<b>4 Numerické experimenty</b>	<b>44</b>
<b>Závěr</b>	<b>47</b>
<b>Literatura</b>	<b>49</b>



# Seznam obrázků

1.1	Referenční a současná konfigurace . . . . .	3
1.2	Uzlová normála a elementové normály . . . . .	8
1.3	Segmentace povrchů . . . . .	9
1.4	Detail segmentu . . . . .	10
3.1	Ukázka jednoho segmentu . . . . .	27
4.1	Testovací úloha . . . . .	44
4.2	Grafické výstupy <i>semihladké</i> Newtonovy metody . . . . .	46

# Úvod

Na katedře 470 Vysoké Školy Báňské – Technické Univerzity Ostrava je vyvíjena knihovna MatSol, která již v současnosti umožňuje řešit různé kontaktní úlohy. Jak již bylo řečeno v zadání diplomové práce, matematický model kontaktní úlohy je v algebraickém tvaru úloha kvadratického programování, resp. úloha minimalizace kvadratického funkcionálu s rovnostními omezeními a nerovnostními omezeními speciálního tvaru. Pokud ale matice soustavy není pozitivně definitní, pak nemůžeme použít výše zmíněný přístup. Pozitivní definitnost matice soustavy může být narušena v případě nelineárního materiálu a počítání v přírůstcích. Jedním z možných řešení je přeformulování úlohy minimalizace na řešení soustavy nelineárních rovnic a omezujících nerovnostních omezení na rovnostní omezení, ve kterých se vyskytují nehladké funkce. Tímto způsobem přeformulovanou úlohu můžeme řešit pomocí *semihladké* Newtonovy metody. V takovém případě je však nutné linearizovat (derivovat) matice tuhosti a kontaktní matice. Naším cílem bude implementace *semihladké* Newtonovy metody do knihovny MatSol a její srovnání s existujícími benchmarky.

Úvodem je potřeba oznámit, že diplomová práce sice nese název „Implementace plné linearizace matic v semihladké Newtonově metodě pro dynamické kontaktní problémy“, avšak v rámci tohoto textu se budeme zabývat pouze stacionární úlohou. Myšlenka využití dynamických úloh zde byla z toho důvodu, abychom jsme během řešení kontaktní úlohy obdrželi matici soustavy, která je pozitivně definitní, resp. abychom měli zaručenou pozitivní definitnost matice soustavy, a mohli bychom ji tak řešit standardními lineárními řešiči. My však budeme testovat algoritmus *semihladké* Newtonovy metody na stacionární úloze, ve které bude matice soustavy právě pozitivně definitní. Navíc, pokud budeme uvažovat jistou hierarchii mezi stacionárními úlohami a dynamickými úlohami, můžeme tuto diplomovou práci chápat v tom smyslu, že se jedná o úvod do problematiky dynamických kontaktních úloh. Také je nutno podotknout, že odvození a následná implementace *semihladké* Newtonovy metody, resp. odvození a implementace linearizací kontaktních matic včetně matice tuhosti, nebude ovlivněno tím, jestli se jedná o úlohu stacionární či dynamickou. Rozdíl ale nalezneme v případě formulace úlohy a v konkrétním testovacím příkladě. V důsledku toho musíme během testování a srovnávání dbát na to, o jakou úlohu se přesně jedná.

Nyní si uveďme jakou posloupnost tvoří nadcházející kapitoly a co od jednotlivých kapitol můžeme očekávat. Pro mnohé nebude překvapením, pokud naše první kapitola, které se budeme věnovat ihned po úvodu, nese název „Formulace kontaktní úlohy“. V rámci této kapitoly, jak už sám název napovídá, provedeme formulaci stacionární kontaktní úlohy. V kapitole je také obsažena diskretizace konkrétních prostorů za účelem použití aproximace konečnými prvky. Ve druhé kapitole s názvem „Semihladká Newtonova metoda“ si zadefinujeme pojem *semihladká* Newtonova metoda a ukážeme si v čem se liší od Newtonovy metody, která předpokládá spojitě diferencovatelnou funkci. Musíme uvést, že tato kapitola byla převzata z [2], jelikož v uvedené disertační práci je vše

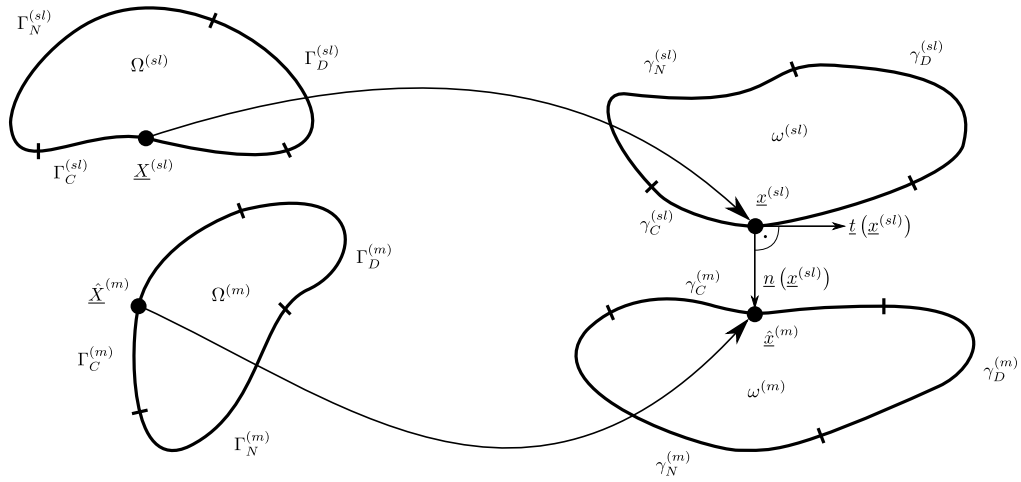
potřebné, co budeme využívat při řešení naší kontaktní úlohy. V další kapitole „PDASS jako semihladká Newtonova metoda“ si ukážeme jakým způsobem využijeme *semihladkou* Newtonovu metodu při řešení kontaktní úlohy, ve které budeme chtít aplikovat myšlenku PDASS. Poslední kapitola „Numerické experimenty“ obsahuje dosažené výsledky pro dva algoritmy Newtonova typu, které jsou porovnány s pevně bodovou úlohou. Závěrem práce zhodnotíme dosažené výsledky a uvedeme, zda-li jsme byli opravdu úspěšní či nikoliv.

Na konec úvodu ještě uvádíme, že celá diplomová práce byla vytvořena na základě vědeckého článku [3], přičemž se budeme snažit jednotlivé kroky dostatečně rozvést, aby každý případný student oboru Výpočetní Matematika na naší univerzitě (ale také i na dalších univerzitách) měl, pokud možno, co nejméně problému při snaze pochopit danou problematiku.

# Kapitola 1

## Formulace kontaktní úlohy

Při formulaci 2D kontaktní úlohy bez tření jsme vycházeli z [3], ale použijeme značení z [4], jelikož podobného značení se na katedře aplikované matematiky používá častěji a spolu se školitelem neskromně doufáme, že z naší práce snad budou čerpat i další studenti.



Obrázek 1.1: Referenční a současná konfigurace

Uvažujme 2D kontaktní úlohu s konečnými deformacemi dvou pružných těles (viz obrázek 1.1). Obě tělesa interpretujeme jako otevřené množiny  $\Omega^{(1)} \subset \mathbb{R}^2$  (*Slave*),  $\Omega^{(2)} \subset \mathbb{R}^2$  (*Master*). Jejich hranice ( $\partial\Omega^{(1)}$ ,  $\partial\Omega^{(2)}$ ) mohou být rozděleny na tyto části:

- na hranici s Neumannovou podmínkou  $\Gamma_N^{(i)}$ ,
- na hranici s Dirichletovou podmínkou  $\Gamma_D^{(i)}$ ,
- na kontaktní hranici  $\Gamma_C^{(i)}$ ,

kde  $i \in \{1, 2\}$ , přičemž je  $1 = sl$ ,  $2 = m$  (číselné značení jednotlivých povrchů bude výhodnější z hlediska slabé formulace). Budeme předpokládat, že části hranice  $\Gamma_N^{(i)}$ ,  $\Gamma_D^{(i)}$  a  $\Gamma_C^{(i)}$  jsou navzájem disjunktní, tzn.

$$\begin{aligned} \partial\Omega^{(i)} &= \bar{\Gamma}_N^{(i)} \cup \bar{\Gamma}_D^{(i)} \cup \bar{\Gamma}_C^{(i)}, \\ \Gamma_N^{(i)} \cap \Gamma_D^{(i)} &= \Gamma_N^{(i)} \cap \Gamma_C^{(i)} = \Gamma_D^{(i)} \cap \Gamma_C^{(i)} = \emptyset. \end{aligned} \tag{1.1}$$

V kontaktní úloze budeme rozlišovat dva typy konfigurace, konfiguraci aktuální ( $\omega^{(i)}$ ,  $\gamma_D^{(i)}$ ,  $\gamma_N^{(i)}$ ,  $\gamma_C^{(i)}$ ,  $\underline{x}^{(i)}$ ) a konfiguraci referenční ( $\Omega^{(i)}$ ,  $\Gamma_D^{(i)}$ ,  $\Gamma_N^{(i)}$ ,  $\Gamma_C^{(i)}$ ,  $\underline{X}^{(i)}$ ). Aktuální konfiguraci obou těles popisuje vektor posunutí

$$\underline{u}^{(i)} = \underline{X}^{(i)} - \underline{x}^{(i)}.$$

Kontaktní úlohu v klasické formulaci pro malé deformace popíšeme

$$-\text{div} \left( \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) \right) = \underline{\hat{f}}^{(i)} \quad \text{v } \Omega^{(i)} \quad (1.2)$$

$$\underline{u}^{(i)} = \underline{\hat{u}}^{(i)} \quad \text{na } \Gamma_D^{(i)} \quad (1.3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)})\underline{n}_0^{(i)} = \underline{\hat{p}}^{(i)} \quad \text{na } \Gamma_N^{(i)} \quad (1.4)$$

Jelikož předpokládáme malé deformace, platí Hookeův vztah mezi napětím a deformací

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) = \lambda^{(i)} \text{tr} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) \right) \underline{\underline{I}}_2 + 2\mu^{(i)} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) &= \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}}(\underline{u}^{(i)}) + \underline{\underline{\nabla}}^\top(\underline{u}^{(i)}) \right) \end{aligned}$$

V bodech na hranici  $\partial\Omega^{(\#)}$  označme vektor napětí pro referenční konfiguraci

$$\underline{p}_0^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) = \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)})\underline{n}_0^{(i)} \quad \text{na } \partial\Omega^{(i)},$$

v aktuální konfiguraci označme vektor napětí (předpokládáme malé deformace)

$$\begin{aligned} \underline{p}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) &= \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{u}^{(i)})\underline{n}^{(i)} \quad \text{na } \partial\omega^{(i)} \\ \underline{p}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) &= p_n^{(i)}\underline{n}^{(i)} + p_t^{(i)}\underline{t}^{(i)}, \quad p_n^{(i)} = \underline{p}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) \cdot \underline{n}^{(i)}, \quad p_t^{(i)} = \underline{p}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) \cdot \underline{t}^{(i)}, \end{aligned}$$

který jsme rozložili na tečnou a normálovou složku. Na kontaktní hranici zavedeme funkci vzdálenosti (mezery) mezi slave a master tělesem

$$g(\underline{X}) = -\underline{n} \left( \underline{x}^{(1)}(\underline{X}^{(1)}) \right) \cdot \left[ \underline{x}^{(1)}(\underline{X}^{(1)}) - \underline{\hat{x}}^{(2)}(\underline{\hat{X}}^{(2)}) \right],$$

kde  $\underline{n} = \underline{n}^{(sl)}$  je normála vzhledem k slave povrchu  $\gamma_C^{(sl)}$  v aktuální konfiguraci,  $\underline{\hat{x}}^{(m)}$  je projekcí slave uzlu  $\underline{x}^{(sl)}$  na master povrch  $\gamma_C^{(m)}$  ve směru této normály a  $\underline{X}$  je vzor pro  $\underline{x}$  v referenční konfiguraci. Dále předpokládáme KKT (Karush-Kuhn-Tucker) podmínky pro normálový kontakt bez tření

$$g \geq 0 \quad (1.5)$$

$$p_n = p_n^{(1)} \leq 0 \quad (1.6)$$

$$p_n g = 0 \quad (1.7)$$

$$p_t = 0 \quad (1.8)$$

spolu s podmínkou rovnováhy (akce a reakce)

$$\underline{p}_C^{(1)} d\gamma^{(1)} = -\underline{p}_C^{(2)} d\gamma^{(2)}. \quad (1.9)$$

Nyní uvedeme smíšenou slabou formulaci. Zavedeme prostor testovacích funkcí

$$\mathcal{V}^{(i)} = \left\{ \underline{v}^{(i)} \in \left[ H^1(\Omega^{(1)}) \right]^2 \mid \underline{v}^{(i)} = \underline{0} \text{ na } \Gamma_D^{(i)} \right\}$$

a její afinní posun – množinu ve které budeme hledat řešení

$$\mathcal{U}^{(i)} = \left\{ \underline{u}^{(i)} \in \left[ H^1(\Omega^{(1)}) \right]^2 \mid \underline{u}^{(i)} = \underline{\hat{u}}^{(i)} \text{ na } \Gamma_D^{(i)} \right\}.$$

Prostor stop z  $\mathcal{V}^{(i)}$  (ale také z  $\mathcal{U}^{(i)}$ ) na  $\Gamma_C^{(i)}$  označme  $\mathcal{W}^{(i)} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C^{(i)})$ . Jeho duál

$$\mathcal{W}_* = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C^{(1)})$$

bude množina pro Lagrangeovy multiplikátory  $\underline{\lambda} = -p_C^{(1)}$ , které smíšená slabá formulace přejatá z [3] používá pro roli záporné hodnoty kontaktního napětí na slave povrchu. Podmínky (1.6)-(1.8) přejdou na

$$\lambda_n \geq 0 \quad (1.10)$$

$$\lambda_n g = 0 \quad (1.11)$$

$$\lambda_t = 0. \quad (1.12)$$

Smíšená slabá formulace zní: Najdi  $\underline{u}^{(i)} \in \mathcal{U}^{(i)}$ , a  $\underline{\lambda} \in \mathcal{W}_*$  takové, že platí (1.10)-(1.12) a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega^{(i)}} \underline{\sigma}^{(i)}(\underline{u}^{(i)}) : \underline{\varepsilon}^{(i)}(\underline{v}^{(i)}) d\Omega \right] - \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Gamma_C^{(i)}} \underline{p}_{C,0}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} d\Gamma \right] = \\ = \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega^{(i)}} \underline{\hat{f}}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} d\Omega + \int_{\Gamma_N^{(i)}} \underline{\hat{p}}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} d\Gamma \right] \quad \forall \underline{v}^{(i)} \in \mathcal{V}^{(i)} \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_C^{(sl)}} \mu_n g d\gamma \geq 0 \quad \forall \underline{\mu} \in \mathcal{W}_* \quad (1.14)$$

Výraz v (1.13) přepíšeme s využitím (1.9) na

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Gamma_C^{(i)}} \underline{p}_{C,0}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} d\Gamma \right] &= - \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\gamma_C^{(i)}} \underline{p}_C^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} d\gamma \right] = - \int_{\gamma_C^{(sl)}} \underline{p}_C^{(1)} \cdot (\underline{v}^{(1)} - \underline{\hat{v}}^{(2)}) d\gamma = \\ &= \int_{\gamma_C^{(sl)}} \underline{\lambda} \cdot (\underline{v}^{(1)} - \underline{\hat{v}}^{(2)}) d\gamma \end{aligned}$$

Nyní přejdeme k diskretizaci smíšené slabé formulace.

## 1.1 Diskretizace

Nebudeme se zde rozepisovat o předpokladech na oblasti  $\Omega^{(i)}$ , tj. polygonické oblasti a tak dále. Předpokládejme, že už máme konečně dimenzionální podprostory  $\mathcal{U}^{(i)h} \subset \mathcal{U}^{(i)}$  a  $\mathcal{V}^{(i)h} \subset \mathcal{V}^{(i)}$ ,  $i \in \{sl, m\}$  a prostor stop  $\mathcal{W}^{(i)h} \subset \mathcal{W}^{(i)}$  vzhledem k příslušnému kontaktnímu povrchu  $\Gamma_C^{(i)}$ . V této diplomové práci budeme předpokládat použití 2D

lineárních TRIA3 (respektive bilineárních QUAD4) elementů, přičemž tvarové funkce diskretizovaného kontaktního povrchu jsou restrikcí konečně prvkových elementů v  $\Omega^{(i)}$ .

V této práci se nebudeme podrobně zabývat diskretizací integrálů v (1.13) přes  $\Omega^{(i)}$ , ani  $\Gamma_N^{(i)}$ , čtenáře odkážeme například na [4]. Geometrickou proměnnou  $\underline{x}^{(i)h}$  a posun  $\underline{u}^{(i)h}$  na elementech master a slave povrchu můžeme zapsat

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(sl)h}|_{\Gamma_C^{(sl)}} &= \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \varphi_k^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \underline{x}_{(k)}^{(sl)} \\ \underline{x}^{(m)h}|_{\Gamma_C^{(m)}} &= \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \varphi_l^{(m)} \left( \underline{X}^{(m)} \right) \underline{x}_{(l)}^{(m)} \\ \underline{u}^{(sl)h}|_{\Gamma_C^{(sl)}} &= \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \varphi_k^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \underline{d}_{(k)}^{(sl)} \\ \underline{u}^{(m)h}|_{\Gamma_C^{(m)}} &= \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \varphi_l^{(m)} \left( \underline{X}^{(m)} \right) \underline{d}_{(l)}^{(m)} \\ \underline{\lambda}^h|_{\Gamma_C^{(sl)}} &= \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \psi_k \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \underline{z}_{(k)}\end{aligned}$$

kde algebraické proměnné  $\underline{x}_{(k)}^{(sl)}, \underline{x}_{(l)}^{(m)}$  mají význam souřadnic uzlů deformovaného tělesa,  $\underline{d}_{(k)}^{(sl)}, \underline{d}_{(l)}^{(m)}$  pak jsou uzlové deformace a  $\underline{z}_{(k)}$  jsou uzlové multiplikátory, které mají význam bodových sil. Symboly  $\varphi_k^{(i)}, \psi_k$  jsou označeny báze funkce konečně dimenzionálních prostorů

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(i)h} &= \text{span} \left\{ \varphi_k^{(i)} \right\} \\ \mathcal{W}_*^h &= \text{span} \left\{ \psi_k \right\},\end{aligned}$$

$n_n^{(sl)}$  je celkový počet uzlů na slave povrchu  $\Gamma_C^{(sl)}$  a  $n_n^{(m)}$  je celkový počet uzlů na master povrchu  $\Gamma_C^{(m)}$ . K diskretizaci multiplikátorů použijeme báze funkce  $\psi_k$ , které jsou tzv. biortogonální k bázevým funkcím  $\varphi_k^{(sl)}$

$$\int_{\Gamma_C^{(sl)}} \psi_j \varphi_k^{(sl)} d\Gamma = \delta_{ij} \int_{\Gamma_C^{(sl)}} \varphi_k^{(sl)} d\Gamma.$$

Pro inženýrskou praxi je předchozí zápis nevhodný, jelikož lze pouze velmi těžko popsat funkční předpisy funkcí  $\varphi$  a  $\psi$ . Tyto funkce potřebujeme v (1.13) a (1.14) integrovat. Funkční předpisy  $\varphi$  a  $\psi$  umíme popsat na konečně prvkovém elementu, a proto je pro inženýrskou mechaniku a implementační praxi hojně používaný zápis

$$\begin{aligned}\varphi_k^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \Big|_{e^{(sl)}} &= N_{(k,e)}^{(sl)} \left( \xi_e^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \right) \\ \psi_k \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \Big|_{e^{(sl)}} &= \Psi_{(k,e)} \left( \xi_e^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \right)\end{aligned}$$

kde na každém 1D lineárním elementu  $e^{(i)} \subset \Gamma_C^{(i)}$  kontaktní hranice  $\Gamma_C^{(i)}$  je definováno zobrazení  $\xi_e^{(i)} : \Gamma_C^{(i)} \mapsto \langle -1, 1 \rangle$  a  $n_n^{(i,e)}$  (počet uzlů elementu  $e^{(i)}$ ) tzv. tvarových funkcí

$N_j^{(i)}(\xi), j \in \{1, \dots, n_n^{(i,e)}\}$ . Zápisem  $N_{(k,e)}^{(sl)}$  je myšleno přiřazení adekvátního indexu  $j$  dané dvojici  $(k, e)$ . V této práci budeme používat pouze LINE2 elementy, které jsou lineární a platí pro ně

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) & \Psi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - 3\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) & \Psi_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + 3\xi) \end{aligned}$$

Nyní máme připraveno vše potřebné pro dosazení do (1.13) a (1.14), předem však bez dalšího vysvětlování uvedeme, že

$$\sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega^{(i)}} \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(\underline{\underline{u}}^{(i)}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(i)}(\underline{\underline{v}}^{(i)}) d\Omega \right] \approx \underline{\underline{v}}^\top \underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}}, \quad (1.15)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega^{(i)}} \underline{\underline{\hat{f}}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{v}}^{(i)} d\Omega + \int_{\Gamma_N^{(i)}} \underline{\underline{\hat{p}}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{v}}^{(i)} d\Gamma \right] \approx \underline{\underline{v}}^\top \underline{\underline{f}}. \quad (1.16)$$

Pro detailnější odvození rovnic (1.15), (1.16) a rovnic v následujících sekcích ohledně diskretizace doporučujeme nahlédnout do [5].

## 1.2 Konstrukce matice $D$

Nyní

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_C^{(sl)}} \underline{\underline{\lambda}}^h \cdot \underline{\underline{v}}^{(sl)h} d\gamma &= \sum_{e=1} \int_e \underline{\underline{\lambda}}^h \cdot \underline{\underline{v}}^{(sl)h} d\gamma = \\ &= \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \int_e \psi_j(\underline{\underline{X}}^{(sl)}) \varphi_k^{(sl)}(\underline{\underline{X}}^{(sl)}) d\gamma \right] \underline{\underline{z}}_{(j)}^\top \underline{\underline{v}}_{(k)}^{(sl)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \int_e \Psi_{(j,e)}(\xi_e^{(sl)}(\underline{\underline{X}}^{(sl)})) N_{(k,e)}^{(sl)}(\xi_e^{(sl)}(\underline{\underline{X}}^{(sl)})) d\gamma \right] \underline{\underline{z}}_{(j)}^\top \underline{\underline{v}}_{(k)}^{(sl)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \int_{-1}^1 \Psi_{(j,e)}(\xi) N_{(k,e)}^{(sl)}(\xi) J(\xi) d\xi \right] \underline{\underline{z}}_{(j)}^\top \underline{\underline{v}}_{(k)}^{(sl)} \approx \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \left[ w_g \Psi_{(j,e)}(\xi_g) N_{(k,e)}^{(sl)}(\xi_g) J(\xi_g) \right] \underline{\underline{z}}_{(j)}^\top \underline{\underline{I}}_{2\mathbf{v}} \underline{\underline{v}}_{(k)}^{(sl)} = \\ &= \underline{\underline{v}}_{(sl)}^\top \underline{\underline{D}} \underline{\underline{z}} \end{aligned}$$

kde

$$J(\xi) = \left\| \frac{\partial \underline{\underline{x}}^{(sl)h}}{\partial \xi} \right\|$$



je Jakobián zobrazení  $\underline{x}^{(sl)h}$  a matice  $\underline{D} \in \mathbb{R}^{2n_n^{(sl)} \times 2n_n^{(sl)}}$  je složena z  $2 \times 2$  bloků na diagonále, které jsou násobkem skaláru  $D_{jj}$  a jednotkové matice,

$$D_{jj} = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \int_e \varphi_j^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) d\gamma \right] = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \left[ w_g N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g) J(\xi_g) \right].$$

Využili jsme zde biortogonality funkcí  $N$  a  $\Psi$ .

### 1.3 Konstrukce matice $M$

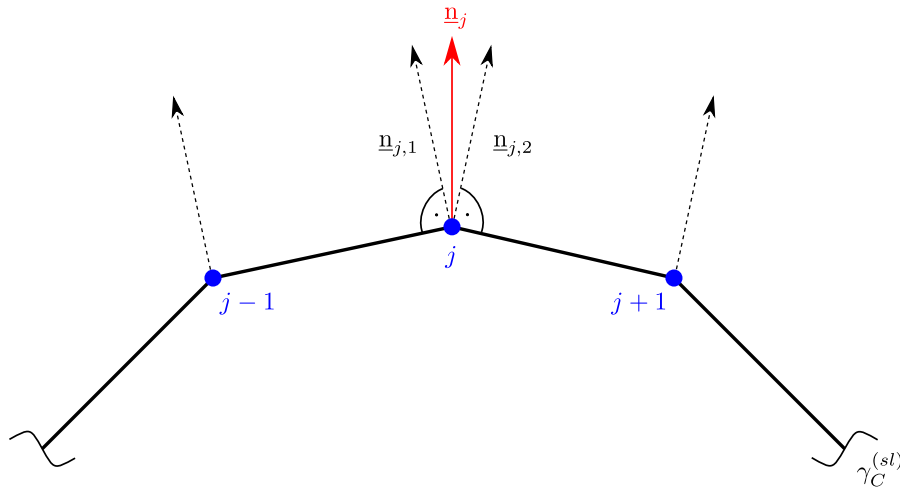
Podobně budeme chtít zapsat

$$- \int_{\gamma_C^{(sl)}} \underline{\lambda} \cdot \underline{\hat{v}}^{(m)} d\gamma \approx - \underline{v}_{|(m)}^\top \underline{M}^\top \underline{z}$$

kde matice  $\underline{M} \in \mathbb{R}^{2n_n^{(sl)} \times 2n_n^{(m)}}$  bude opět složena z  $2 \times 2$  bloků a uvidíme, že

$$M_{jl} = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \int_e \psi_j \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \varphi_l^{(m)} \left( \underline{\hat{X}}^{(m)} \right) d\gamma \right].$$

Vyjádření vztahu pro výpočet prvku  $M_{jl}$  matice  $\underline{M}$  pomocí Gaussovy kvadratury bude složitějším úkolem. Problém spočívá v tom, že integrujeme přes element  $e$  součin duální tvarové funkce  $\Psi$  a projekci tvarové funkce  $N^{(m)}$  na slave element. Předpis této projekce však nemusí být na celém slave elementu pouze jeden, jelikož každá příslušná dvojice master a slave elementů má svůj předpis pro projekci. Abychom tento problém překonali, nebudeme integrovat přes elementy, ale přes tzv. *kontaktní segmenty*, které vzniknou rozdělením konečně prvkových elementů na části, pro které se předpis projekce master-slave nemění, resp. jedná se o rozdělení slave a master povrchu na menší celky zvané segmenty, na kterých jsou obě funkce definované jedním předpisem. Rozdělení master a slave povrchu na segmenty je založeno na předpokladu spojitého normálového pole slave povrchu  $\gamma_C^{(sl)}$  a na projekci slave a master uzlů na protější povrch podél těchto normál. V důsledku toho si nyní zadefinujeme pojem uzlová normála.



Obrázek 1.2: Uzlová normála a elementové normály

Pokud uzel  $j \in \mathcal{S}$  má dva přilehlé elementy (viz obrázek 1.2), pak normálu v uzlu  $j$  vypočítáme podle vztahu

$$\underline{n}_j = \frac{\underline{n}_{j,1} + \underline{n}_{j,2}}{\|\underline{n}_{j,1} + \underline{n}_{j,2}\|}, \quad (1.17)$$

kde  $\underline{n}_{j,1}$ ,  $\underline{n}_{j,2}$  jsou jednotkové elementové normály, resp. jednotkové normály příslušného elementu. Na základě vztahu (1.17) je spojitě normálové pole definováno pomocí standardních tvarových funkcí  $N_j^{(sl)}$

$$\underline{n} = \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} N_j^{(sl)} \left( \xi^{(sl)} \right) \underline{n}_j.$$

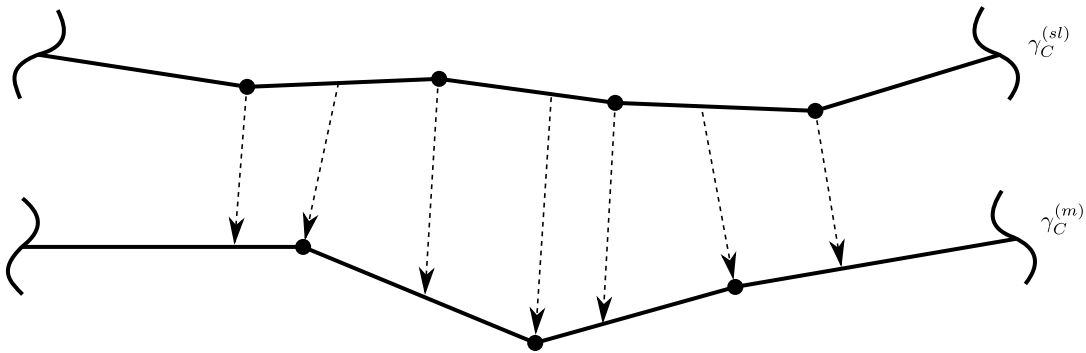
Nyní si zadefinujme výše zmíněné projekce master a slave uzlů na protější povrch. Projekce slave uzlu  $\underline{x}_j^{(sl)}$  na master element  $e$  s uzly  $\underline{x}_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, n_n^{(m,e)}$  je dána předpisem

$$\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_l^{(m)} \left( \xi^{(m)} \right) \underline{x}_l^{(m)} \right) - \underline{x}_j^{(sl)} \right] \times \underline{n}_j = \underline{0}, \quad (1.18)$$

kde  $\xi^{(m)}$  je bod na master elementu, který vznikl projekcí slave uzlu  $\underline{x}_j^{(sl)}$  na daný master element. Projekce master uzlu  $\underline{x}_l^{(m)}$  na slave element  $e$  s uzly  $\underline{x}_j^{(sl)}$ ,  $j = 1, \dots, n_n^{(sl,e)}$  je dána předpisem

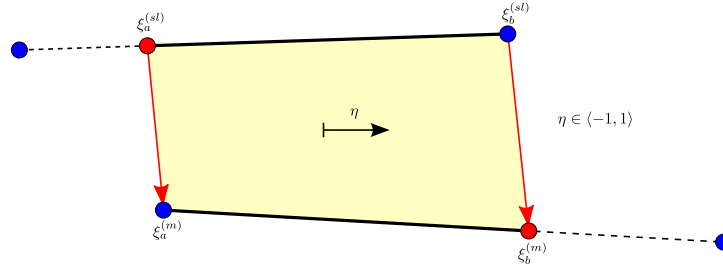
$$\left[ \left( \sum_{j=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_j^{(sl)} \left( \xi^{(sl)} \right) \underline{x}_j^{(sl)} \right) - \underline{x}_l^{(m)} \right] \times \left[ \sum_{j=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_j^{(sl)} \left( \xi^{(sl)} \right) \underline{n}_j \right] = \underline{0}, \quad (1.19)$$

kde  $\xi^{(sl)}$  je bod na slave elementu, který vznikl projekcí master uzlu  $\underline{x}_l^{(m)}$  na daný slave element. Vztahy (1.18), (1.19) jsou obecně nelineární podmínky projekce souřadnic, a tedy bývají obvykle řešeny lokální Newtonovou iterací.



Obrázek 1.3: Segmentace povrchů

Koncové body segmentu značené  $\xi_a^{(sl)}$ ,  $\xi_b^{(sl)}$ ,  $\xi_a^{(m)}$ ,  $\xi_b^{(m)}$  mohou být dány projekcí slave uzlu na master element a naopak nebo mohou být shodné s koncovým bodem elementu (viz obrázek 1.3). Detailní pohled na jeden segment je znázorněn na následujícím obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Detail segmentu

Modrou barvou jsou označeny uzly elementu příslušného povrchu a červenou barvou body vzniklé projekcí uzlu z protějšího povrchu. Poznamenejme, že pro koncové body segmentů platí  $\xi_a^{(sl)}, \xi_b^{(sl)}, \xi_a^{(m)}, \xi_b^{(m)} \in \langle -1; 1 \rangle$ . Jejich konkrétní hodnota závisí na lokálních elementových souřadnicích jednotlivých povrchů.

Zbývá nám si zavést segmentovou parametrizaci definovanou jako  $\eta \in \langle -1; 1 \rangle$ , která je potřebná pro aplikaci Gaussovy kvadratury na kontaktní segmenty. Zobrazení z elementových souřadnic  $\xi^{(i)}, i \in \{sl, m\}$  na segmentové souřadnice  $\eta$  je dáno vztahem

$$\xi^{(i)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\xi_a^{(i)} + \frac{1}{2}(1 + \eta)\xi_b^{(i)}.$$

Nyní můžeme přistoupit k rozepsání členu

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_c^{(sl)}} \underline{\lambda} \cdot \underline{\hat{v}}^{(m)} d\gamma &= - \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \sum_{s=1}^{n_s} \left[ \int_s \psi_j(\underline{X}^{(sl)}) \varphi_l^{(m)}(\underline{\hat{X}}^{(m)}) d\gamma \right] \underline{z}_{(j)} \cdot \underline{v}_{(l)}^{(m)} = \\ &= - \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \sum_{s=1}^{n_s} \left[ \int_s \Psi_{(j,s)}(\xi_s^{(sl)}(\underline{X}^{(sl)})) N_{(l,s)}^{(m)}(\xi_s^{(m)}(\underline{\hat{X}}^{(m)})) d\gamma \right] \underline{z}_{(j)} \cdot \underline{v}_{(l)}^{(m)} = \\ &= - \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \sum_{s=1}^{n_s} \left[ \int_{-1}^1 \Psi_{(j,s)}(\xi_s^{(sl)}(\eta)) N_{(l,s)}^{(m)}(\xi_s^{(m)}(\eta)) J_s(\eta) d\eta \right] \underline{z}_{(j)}^\top \underline{v}_{(l)}^{(m)} \approx \\ &\approx - \sum_{j=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \sum_{s=1}^{n_s} \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} \left[ w_g \Psi_{(j,s)}(\xi_s^{(sl)}(\eta_g)) N_{(l,s)}^{(m)}(\xi_s^{(m)}(\eta_g)) J_s(\eta_g) \right] \underline{z}_{(j)}^\top \underline{v}_{(l)}^{(m)} = \\ &= \underline{v}_{(m)}^\top \underline{\underline{M}}^\top \underline{z} \end{aligned}$$

kde

$$J_s(\eta) = \left\| \frac{\partial \underline{X}^{(sl)}}{\partial \xi^{(sl)}} \right\| \left| \frac{\partial \xi^{(sl)}}{\partial \eta} \right| = J(\xi^{(sl)}(\eta)) \frac{\xi_b^{(sl)} - \xi_a^{(sl)}}{2}.$$

Bloky matice  $\underline{\underline{M}}$  jsou tvořeny násobkem skaláru  $M_{jl}$  a  $2 \times 2$  matice  $\underline{\underline{I}}_2$ , kde

$$M_{jl} = \sum_{s=1}^{n_s} \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} \left[ w_g \Psi_{(j,s)}(\xi_s^{(sl)}(\eta_g)) N_{(l,s)}^{(m)}(\xi_s^{(m)}(\eta_g)) J_s(\eta_g) \right].$$

## 1.4 Diskretizace kontaktního omezení

Nyní zbývá diskretizovat integrál v (1.14)

$$0 \leq \int_{\gamma_C^{(sl)}} \mu_n^h g^h d\gamma = - \int_{\gamma_C^{(sl)}} \mu_n^h \left( \underline{x}^{(sl)}(\underline{X}^{(sl)}) \right) \underline{n} \left( \underline{x}^{(sl)}(\underline{X}^{(sl)}) \right) \cdot \left[ \underline{x}^{(sl)}(\underline{X}^{(sl)}) - \hat{\underline{x}}^{(m)}(\hat{\underline{X}}^{(m)}) \right] d\gamma.$$

Vyčíslení integrálů v tomto vzorci by bylo příliš náročné. Speciální volbou  $\mu_n^h$  zavedeme diskretizovanou podobu tohoto nerovnostního omezení, které se rozpadne na  $n_n^{(sl)}$  linearizovaných nerovnostních omezení. Dosadíme

$$\mu_n^h = \sum_{i=1}^{n_n^{(sl)}} \psi_j \left( \underline{X}^{(sl)} \right) (\tilde{z}_n)_i$$

Volbou  $(\tilde{z}_n)_i = \delta_{ij}$  pro  $j$ -té nerovnostní omezení a zároveň pro  $j$ -té omezení předpokládejme konstantní normálu  $\underline{n} \left( \underline{x}^{(sl)}(\underline{X}^{(sl)}) \right) = \underline{n}_j$  a dostaneme, že  $\forall j \in \{1, \dots, n_n^{(sl)}\}$  platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \underline{n}_{(j)}^\top \left[ \int_e \psi_j \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \varphi_k^{(sl)} \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \left( \underline{x}_{(k)}^{(sl)} \right) d\gamma \right] \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \sum_{s=1}^{n_s} \underline{n}_{(j)}^\top \left[ \int_s \psi_j \left( \underline{X}^{(sl)} \right) \varphi_l^{(m)} \left( \hat{\underline{X}}^{(m)} \right) \left( \underline{x}_{(l)}^{(m)} \right) d\gamma \right] \\ 0 &\leq \tilde{g}_j = -\underline{n}_{(j)}^\top \left[ \underline{D} (\underline{X} + \underline{d})|_{(sl)} - \underline{M} (\underline{X} + \underline{d})|_{(m)} \right]_{(j)}. \end{aligned}$$

## 1.5 Algebraický tvar diskretizované úlohy

Na základě výše odvozených vztahů lze po diskretizaci převést kontaktní úlohu na algebraický tvar

$$\underbrace{\underline{K} \underline{d}}_{=\underline{f}_{int}(\underline{d})} + \underbrace{\underline{D}^\top \underline{z} - \underline{M}^\top \underline{z}}_{=\underline{f}_C(\underline{d}, \underline{z})} - \underbrace{\underline{f}}_{=\underline{f}_{ext}} = \underline{0} \quad (1.20)$$

$$\tilde{g}_j \geq 0 \quad (1.21)$$

$$(z_n)_j \geq 0 \quad (1.22)$$

$$(z_n)_j \tilde{g}_j = 0 \quad (1.23)$$

$$(z_t)_j = 0. \quad (1.24)$$

## Kapitola 2

# Semihladká Newtonova metoda

V této kapitole si zadefinujeme pojem *SEMIHLADKÁ* Newtonova metoda, ale předtím si připomeneme definici Newtonovy metody. Uved'me, že všechny poznatky ohledně Newtonovy metody a *semihladké* Newtonovy metody jsou převzaty z [1] a z [2].

### 2.1 Newtonova metoda

Newtonova metoda je numerická metoda, která se používá pro hledání kořenů nelineární funkce  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tzn. hledáme  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  tak, aby platilo  $F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , kde  $F$  je alespoň jednou spojitě diferencovatelná. Poté Newtonova metoda generuje posloupnost vektorů  $(\mathbf{x}^k)$  blížících se k řešení  $\mathbf{x}^*$  podle následujícího pravidla

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{F}': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  představuje Jakobiho matici funkce  $F$ , která je regulární. Pokud si označíme přírůstek v  $k$ -tém kroce jako  $\Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$  a přenásobíme-li předpis maticí  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$ , dostaneme nový předpis, ve kterém řešíme soustavu

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k. \quad (2.2)$$

Poznamenejme, že této metodě se také přezdívá *Newton-Raphsonova metoda*.

Uved'me si ještě větu týkající se konvergence Newtonovy metody.

**Věta 1.** *Nechť  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  a nechť  $\mathbf{x}^* \in D$  je řešením nelineární rovnice  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Navíc předpokládejme, že  $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^*)]^{-1}$  existuje,  $\|[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^*)]^{-1}\|$  je ohraničená a  $\mathbf{F}'$  je Lipschitzovsky spojitá. Pak pro všechna  $\mathbf{x}^0$ , která jsou dostatečně blízko  $\mathbf{x}^*$ , je posloupnost  $(\mathbf{x}^k)$  generována předpisem (2.1) dobře definovaná a konverguje  $Q$ -kvadraticky k  $\mathbf{x}^*$ .*

Věta výše má lokální charakter, resp. konvergence je zaručena, pokud počáteční vektor  $\mathbf{x}^0$  volíme dostatečně blízko vektoru řešení  $\mathbf{x}^*$ . Pro globální konvergenci existují tzv. globalizační strategie založené na volbě pevné délky kroku nebo na Armijově pravidle. Nyní, když jsme si připomněli Newtonovu metodu, můžeme přejít k definici *semihladké* Newtonovy metody.

## 2.2 Semihladká Newtonova metoda

V mnoha aplikacích nemusí být nelineární funkce  $F$  diferencovatelná (v klasickém smyslu), pak soustavu

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

nazýváme jako *NEHLADKOU*. V takovém případě je zapotřebí zobecnit pojem Newtonovy metody, resp. celkově zobecnit pojem diferencovatelnosti (zobecnit Jakobiho matici funkce  $F$ ). Jednou z možností je Rademacherova věta, ve které je za předpokladu Lipschitzovské spojitosti  $F$ ,  $F$  diferencovatelná skoro všude. Pro takové  $F$  je definován Clarkeův zobecněný Jakobián a jeho prvek může být použit v Newtonově metodě. Bohužel předpoklad Lipschitzovské spojitosti  $F$  není dostatečný pro dokázání, že zobecněné Newtonovy iterace jsou dobře definovány. V důsledku toho je potřeba třídu funkcí, které mohou být použity ve zobecněné Newtonově metodě, zúžit na funkce *semihladké*. Poté jsme schopni dokázat Q-superlineární konvergenci *semihladké* Newtonovy metody. Dříve než si uvedeme předpis *semihladké* Newtonovy metody, si zavedeme pojem *Newtonovské* diferencovatelnosti.

Nechť  $X$  a  $Y$  jsou Banachovy prostory s příslušnými normami  $\|\cdot\|_X$ ,  $\|\cdot\|_Y$ . Nechť  $\mathcal{L}(X, Y)$  je množina všech lineárních omezených zobrazení z  $X$  do  $Y$  s normou  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ . Dále nechť  $D \subseteq X$  je otevřenou podmnožinou,  $F: D \rightarrow Y$  funkcí a  $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in X$ .

**Definice 1.** (i) Funkci  $F$  nazveme *Newtonovsky diferencovatelnou* v  $\mathbf{x} \in D$ , pokud existuje zobrazení  $F^\circ: D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  takové, že  $F^\circ$  je jednoznačně ohraničená na otevřeném okolí  $\mathbf{x}$  a

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_X} \|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - F^\circ(\mathbf{x} + \mathbf{h})\mathbf{h}\|_Y = 0.$$

Pak funkci  $F^\circ$  nazýváme *Newtonovsky diferencovatelnou funkcí funkce  $F$  v  $\mathbf{x}$* .

(ii) Funkci  $F$  nazýváme *Newtonovsky diferencovatelnou* v  $D$ , pokud existuje zobrazení  $F^\circ: D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  takové, že  $F^\circ$  je *Newtonovsky diferencovatelnou funkcí funkce  $F$  v každém bodě  $\mathbf{x} \in D$* . Pak funkci  $F^\circ$  nazýváme *Newtonovsky diferencovatelnou funkcí funkce  $F$  v  $D$* .

*Semihladká* Newtonova metoda generuje posloupnost vektorů  $(\mathbf{x}^k)$  podle předpisu

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \left[F^\circ(\mathbf{x}^k)\right]^{-1} F(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

kde  $F^\circ$  je *Newtonovsky diferencovatelná funkce funkce  $F$* . Dodejme, že v (2.3) je  $F^\circ(\mathbf{x}^k) \in \mathcal{L}(X, Y)$  a označením  $\left[F^\circ(\mathbf{x}^k)\right]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  rozumíme inverzní zobrazení k  $F^\circ(\mathbf{x}^k)$ . Pokud si přírůstek v kroku  $k$  označíme stejným způsobem jako tomu bylo výše a provedeme-li přenásobení předpisu funkcí  $F^\circ$ , dostaneme

$$F^\circ(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = -F(\mathbf{x}^k), \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k. \quad (2.4)$$

Všimneme si, že předpis (2.4) *semihladké* Newtonovy metody je podobný předpisu (2.2), ale v případě *semihladké* Newtonovy metody jsme zobecnili pojem diferencovatelnosti. Navíc lze ukázat rovnost mezi  $F^\circ = F'$ , pokud  $F$  je spojitě diferencovatelná.

Na závěr kapitoly si ještě uved' me větu pojednávající o konvergenci *semihladké* Newtonovy metody.

**Věta 2.** Nechť  $F: X \rightarrow Y$  je *Newtonovsky diferencovatelná* v  $D$  s *Newtonovsky diferencovatelnou funkcí  $F^\circ$* . Předpokládejme, že  $\mathbf{x}^* \in D$  je řešení nelineární rovnice  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Předpokládejme, že  $F^\circ$  je regulární pro všechna  $\mathbf{x} \in D$  a že existuje kladná konstanta  $M$  taková, pro kterou

platí

$$\left\| [\mathbf{F}'(\mathbf{x})]^{-1} \right\| \leq M, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}.$$

Pak existuje  $r > 0$  takové, že pro jakoukoliv počáteční iteraci  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{B}(\mathbf{x}^*, r)$  je posloupnost generovaná předpisem (2.3) definována jednoznačně a konverguje k  $\mathbf{x}^*$   $Q$ -superlineárně.

Důkaz druhé věty a ukázky Newtonovskiy diferencovatelných funkcí jsou uvedeny v [2].

Pokud jsou  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{R}^n$  Banachovy prostory, pak Věta 2. platí i pro konečné dimenze a právě toho využijeme při řešení kontaktní úlohy, ve které používáme aproximaci konečnými prvky.

## Kapitola 3

# PDASS jako semihladká Newtonova metoda

V první kapitole jsme si zformulovali kontaktní úlohu, která je v podstatě úlohou minimalizační s omezením na nerovnost. Naším úkolem bude převést minimalizační úlohu s omezením na nerovnost na minimalizační úlohu s omezením na rovnost, a poté na takto přeformulovanou úlohu aplikovat semihladkou Newtonovu metodu. K transformaci nerovnostních omezení na rovnostní omezení využijeme myšlenky PDASS (z anglického Primal-Dual Active Set Strategy, tzn. primárně-duální přístup založený na aktivní množině), viz [3], kapitola 6. Cílem PDASS je rozdělit množinu slave uzlů  $\mathcal{S}$  na podmnožinu  $\mathcal{A}$  (zvanou aktivní) obsahující všechny uzly, které jsou právě v kontaktu s master tělesem a její doplněk  $\mathcal{I} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}$  (zvaný neaktivní množina), tzn. množinu uzlů, které nejsou v kontaktu s master tělesem. V důsledku toho můžeme převést nerovnostní omezení (1.21)-(1.23) na rovnostní omezení a přeformulovat tak kontaktní úlohu (1.20)-(1.24) na

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}} &= \underline{\mathbf{f}}_{int}(\underline{\mathbf{d}}) - \underline{\mathbf{f}}_{ext} + \underline{\mathbf{f}}_C(\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{z}}) = \underline{\mathbf{0}} \\ \tilde{g}_j &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{A} \\ (z_n)_j &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{I} \\ (z_t)_j &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde vektor  $\underline{\mathbf{r}}$  představuje reziduální sílu. Podíváme-li se na (3.1) detailněji, zjistíme, že máme definovány tři omezení na rovnost, přičemž dvě z nich jsou definovány na dvou různých množinách  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{I}$ . Různé předpisy rovnostního omezení pro množiny  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{I}$  jsou pro nás značným problémem, protože k hledání aktivní množiny nelze použít algoritmy Newtonova typu. Je to způsobeno tím, že pro zadané  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{I}$  už máme rovnostními omezeními v (3.1) striktně nedefinované některé hodnoty (či rovnostní vazby) pro vektory  $\underline{\mathbf{d}}$  a  $\underline{\mathbf{z}}$ . Lze si to také představit tak, že nemohou být stanoveny žádné tečné informace pro aktivní  $\mathcal{A}$  a neaktivní  $\mathcal{I}$  množinu. Musíme tedy úlohu (3.1) přeformulovat tak, abychom k jejímu řešení byli schopni použít Newtonovu metodu, tedy definovat pro každou kombinaci  $\underline{\mathbf{d}}$  a  $\underline{\mathbf{z}}$  takovou funkci, aby její nulová hladina splňovala rovnostní podmínky v (3.1). Zdefinujeme si tzv. doplňkovou funkci  $C_j$  předpisem

$$C_j(\underline{\mathbf{z}}_j, \underline{\mathbf{d}}) = (z_n)_j - \max\left(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j\right) \quad \forall j \in \mathcal{I} \tag{3.2}$$

pro daný parametr  $c_n > 0$ . Jelikož normála  $\underline{\mathbf{n}}_j$ , která je obsažená v  $(z_n)_j = \underline{\mathbf{n}}_j \cdot \underline{\mathbf{z}}_j$ , a uzlová vzdálenost (mezera)  $\tilde{g}_j$  závisí nelineárně na posunu  $\underline{\mathbf{d}}$ , je celá funkce  $C_j$  nejenom funkcí



multiplikátorů  $\underline{z}$ , ale také je nelineární funkcí posunu  $\underline{d}$ . Ukažme, že nulová hladina funkcí  $C_j, j \in \mathcal{S}$

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = 0, \quad (3.3)$$

je ekvivaletní s KKT podmínkami (1.21)-(1.23), tedy platí poslední tři rovnosti v (3.1).

*Důkaz.* Nejprve si dokážeme následující implikaci

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j &\geq 0, \\ (z_n)_j &\geq 0, \quad \implies \quad C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max\left(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j\right) = 0. \\ (z_n)_j \tilde{g}_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vzhledem k uvedeným předpokladům (zejména předpokladu  $(z_n)_j \tilde{g}_j = 0$ ) můžou nastat pouze tři situace.

1.  $(z_n)_j = 0 \wedge \tilde{g}_j > 0$ :

$$\begin{aligned} (z_n)_j - \max\left(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j\right) &= 0 \\ 0 - \max\left(0, \overbrace{0 - c_n \tilde{g}_j}^{<0}\right) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

V případě první situace implikace (3.4) platí.

2.  $\tilde{g}_j = 0 \wedge (z_n)_j > 0$ :

$$\begin{aligned} (z_n)_j - \max\left(0, \overbrace{(z_n)_j - c_n 0}^{>0}\right) &= 0 \\ (z_n)_j - (z_n)_j &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

V případě druhé situace implikace (3.4) také platí.

3.  $\tilde{g}_j = 0 \wedge (z_n)_j = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 - \max(0, 0 - c_n 0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

V případě poslední situace implikace (3.4) opět platí.

Dokázali jsme, že výše napsaná implikace (3.4) je pro dané předpoklady platná.

Jelikož máme dokázat ekvivalenci, musíme dokázat také opačnou implikaci

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j &\geq 0 \\ (z_n)_j &\geq 0 \quad \iff \quad C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max\left(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j\right) = 0. \\ (z_n)_j \tilde{g}_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Víme, že  $(z_n)_j$  a  $\tilde{g}_j$  jsou čísla, přičemž je  $c_n > 0$ . Budeme tedy volit například číslo  $(z_n)_j$  a k němu budeme „hledat“ číslo  $\tilde{g}_j$ . Pro číslo  $(z_n)_j$  můžou opět nastat tři situace.

1.  $(z_n)_j > 0$  :

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = 0$$

Když víme, že  $(z_n)_j > 0$  a  $c_n > 0$ , pak výsledek funkce  $\max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j)$  bude záviset na hodnotě  $\tilde{g}_j$ , tzn. jeli  $\tilde{g}_j$  kladné, záporné nebo nulové.

(a) Když  $\tilde{g}_j > 0$ , pak

$$\text{i. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j < 0 \Rightarrow C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = (z_n)_j - 0 > 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

$$\text{ii. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j = 0 \Rightarrow C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = (z_n)_j - 0 > 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

$$\text{iii. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j > 0 \Rightarrow C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = c_n \tilde{g}_j > 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

(b) Když  $\tilde{g}_j = 0$ , pak

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n 0) = 0.$$

(c) Když  $\tilde{g}_j < 0$ , pak

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = c_n \tilde{g}_j < 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

2.  $(z_n)_j = 0$  :

$$0 = C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = 0 - \max(0, 0 - c_n \tilde{g}_j) = \begin{cases} 0 & \dots \tilde{g}_j \geq 0 \\ \tilde{g}_j & \dots \tilde{g}_j < 0 \end{cases}$$

tedy  $\tilde{g}_j \geq 0$ .

3.  $(z_n)_j < 0$  :

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = 0$$

(a) Když  $\tilde{g}_j > 0$ , pak

$$(z_n)_j - c_n \tilde{g}_j < 0 \Rightarrow C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = (z_n)_j < 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

(b) Když  $\tilde{g}_j = 0$ , pak

$$C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n 0) = (z_n)_j < 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

(c) Když  $\tilde{g}_j < 0$ , pak

$$\text{i. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j < 0 \Rightarrow C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = (z_n)_j < 0 \dots \text{SPOR !!!}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = \\
& (z_n)_j < 0 \dots \text{SPOR !!!} \\
\text{iii. } (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j &> 0 \quad \Rightarrow \quad C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) = (z_n)_j - \max(0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j) = \tilde{g}_j < \\
& 0 \dots \text{SPOR !!!}
\end{aligned}$$

Existují tedy tři možné případy

1.  $(z_n)_j > 0 \wedge \tilde{g}_j = 0$ ,
2.  $(z_n)_j = 0 \wedge \tilde{g}_j > 0$ ,
3.  $(z_n)_j = 0 \wedge \tilde{g}_j = 0$ ,

kdy je splněn uvedený předpoklad (3.5). Tyto případy lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_j &\geq 0, \\
(z_n)_j &\geq 0, \\
(z_n)_j \tilde{g}_j &= 0.
\end{aligned}$$

Získali jsme zmíněné KKT podmínky (1.21)-(1.23) a dokázali jsme, že i druhá implikace platí, a tudíž platí ekvivalentní vztah mezi KKT podmínkami (1.21)-(1.23) a doplňkovou funkcí  $C_j$ .

□

V důkazu výše si můžeme všimnout nezávislosti platnosti ekvivalence mezi KKT podmínkami (1.21)-(1.23) a doplňkovou funkcí  $C_j$  na volbě  $c_n$ . Z numerického hlediska se doporučuje  $c_n$  volit stejného řádu jako je Youngův modul kontaktních těles. Detailnější popis vlivu volby  $c_n$  na algoritmus *semihladké* Newtonovy metody je k nahlédnutí v [3].

Nyní, když máme zadanou doplňkovou funkci  $C_j$ , můžeme přeformulovat úlohu (3.1) na

$$\begin{aligned}
\underline{r} &= \underline{f}_{int}(\underline{d}) - \underline{f}_{ext} + \underline{f}_C(\underline{d}, \underline{z}) = \underline{0}, \\
C_j(\underline{z}_j, \underline{d}) &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{S}, \\
(z_t)_j &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{S},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

kde informaci, jestli daný bod náleží do aktivní nebo neaktivní množiny, v sobě nese nehladá funkce  $C_j$ , jejíž předpis je složen ze dvou různých větví. O derivaci funkce  $C_j$  se zmíníme v sekci „Linearizace doplňkové funkce“.

Naším dalším úkolem bude aplikovat *semihladkou* Newtonovu metodu na výše uvedenou úlohu (3.6). Díky *semihladké* Newtonově metodě převedeme soustavu nelineárních rovnic (3.6) na soustavu lineárních rovnic. Rozeberme si tedy detailně jednotlivé linearizace, které budou vystupovat ve finálním tvaru soustavy lineárních rovnic.

### 3.1 Linearizace normálového a tečného vektoru

Jako první se budeme věnovat linearizaci normálového vektoru a pomocí ní poté odvodíme i linearizaci tečného vektoru. Jelikož budeme potřebovat pouze normály kontaktní hranice slave tělesa, budeme linearizaci tečného a normálového vektoru uvažovat zde.

Nechť  $\hat{\mathbf{n}}_{j,e}$  představuje elementovou normálu elementu  $e$  sousedícího s  $j$ -tým uzlem povrchu slave. Normála  $\hat{\mathbf{n}}_{j,e}$  není normovaná, resp. není jednotková, a definujeme ji ve tvaru

$$\hat{\mathbf{n}}_{j,e} = \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) \begin{bmatrix} x_{k,y} \\ -x_{k,x} \end{bmatrix},$$

kde  $(x_{k,x}, x_{k,y}) = (X_{k,x}, X_{k,y}) + \underline{\mathbf{d}}_k = (X_{k,x}, X_{k,y}) + (d_{k,x}, d_{k,y})$  a  $n_n^{(sl,e)}$  je počet uzlů daného elementu.

Derivací elementové normály  $\hat{\mathbf{n}}_{j,e}$  získáme předpis

$$\Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,e} = \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) \begin{bmatrix} \Delta x_{k,y} \\ -\Delta x_{k,x} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) \begin{bmatrix} \Delta (X_{k,y} + d_{k,y}) \\ -\Delta (X_{k,x} + d_{k,x}) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) \begin{bmatrix} \Delta d_{k,y} \\ -\Delta d_{k,x} \end{bmatrix},$$

který přepíšeme do maticového tvaru

$$\Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{\partial N_k}{\partial \xi}(\xi_j) & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d_{1,x} \\ \Delta d_{1,y} \\ \vdots \\ \Delta d_{|\mathcal{S}|,x} \\ \Delta d_{|\mathcal{S}|,y} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{P}}_e \Delta \underline{\mathbf{d}}_{\mathcal{S}}.$$

Matice  $\hat{\mathbf{P}}_e \in \mathbb{R}^{2 \times 2|\mathcal{S}|}$  obsahuje  $n_n^{(sl,e)}$  nenulových bloků velikosti  $2 \times 2$  reprezentující příspěvky linearizace uzlových souřadnic  $\Delta \underline{\mathbf{d}}_k$  elementu  $e$  do normály ve slave uzlu  $j$ . Ostatní bloky matice  $\hat{\mathbf{P}}_e$  jsou nulové. Vektor  $\Delta \underline{\mathbf{d}}_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}|}$  je tvořen derivacemi posunů v jednotlivých slave uzlech  $j$ .

Pro elementový normovaný normálový vektor  $\underline{\mathbf{n}}_{j,e}$  platí

$$\underline{\mathbf{n}}_{j,e} = \frac{1}{l_{j,e}} \hat{\mathbf{n}}_{j,e},$$

kde jsme z důvodu přehlednějšího zápisu označili  $l_{j,e} = \|\hat{\mathbf{n}}_{j,e}\|$ .

Označme si  $\tilde{\mathbf{n}}_j$  jako nenormovanou normálu ve slave uzlu  $j$ , pro kterou platí

$$\tilde{\mathbf{n}}_j = \frac{1}{l_{j,1}} \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + \frac{1}{l_{j,2}} \hat{\mathbf{n}}_{j,2}, \quad (3.7)$$

tzp. výslednou normálu získáme součtem normovaných elementových normál elementů sousedících se slave uzlem  $j$ . V našem případě je normála  $\tilde{\mathbf{n}}_j$  tvořena součtem dvou elementových normál.

Pro další úpravy bude výhodnější nenormovanou uzlovou normálu  $\tilde{\mathbf{n}}_j$  zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{n}}_j = l_{j,2} \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + l_{j,1} \hat{\mathbf{n}}_{j,2}. \quad (3.8)$$

Vektory  $\tilde{\mathbf{n}}_j$  a  $\hat{\mathbf{n}}_j$  se sice liší délkou, ale jelikož je budeme později normovat, nezáleží na tom, který z nich dále použijeme.

V dalším kroku si vyjádříme derivaci normálového vektoru  $\hat{\mathbf{n}}_j$  podle posunu  $\underline{\mathbf{d}}$

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{n}}_j &= \Delta l_{j,2} \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + l_{j,2} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + \Delta l_{j,1} \hat{\mathbf{n}}_{j,2} + l_{j,1} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,2} = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{n}}_{j,2} \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,2}}{l_{j,2}} \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + l_{j,2} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,1} + \frac{\hat{\mathbf{n}}_{j,1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,1}}{l_{j,1}} \hat{\mathbf{n}}_{j,2} + l_{j,1} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,2},\end{aligned}\quad (3.9)$$

kde

$$\Delta l_{j,e} = \Delta \sqrt{\hat{\mathbf{n}}_{j,e} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{j,e}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_{j,e} \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,e}}{l_{j,e}}.$$

Výše uvedený vztah pro  $\Delta \hat{\mathbf{n}}_j$  převedeme do globálního maticového zápisu, který je mnohem výhodnější pro implementaci algoritmu. Jako první si rozepíšeme a upravíme první člen výrazu (3.9)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{n}}_{j,2} \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,2}}{l_{j,2}} \hat{\mathbf{n}}_{j,1} &= \frac{\begin{bmatrix} \hat{n}_{j,2,x} \\ \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \hat{n}_{j,2,x} \\ \Delta \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix}}{l_{j,2}} \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,1,x} \\ \hat{n}_{j,1,y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l_{j,2}} (\hat{n}_{j,2,x} \Delta \hat{n}_{j,2,x} + \hat{n}_{j,2,y} \Delta \hat{n}_{j,2,y}) \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,1,x} \\ \hat{n}_{j,1,y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l_{j,2}} \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,x} \Delta \hat{n}_{j,2,x} + \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,y} \Delta \hat{n}_{j,2,y} \\ \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,x} \Delta \hat{n}_{j,2,x} + \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,y} \Delta \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l_{j,2}} \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,x} & \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,y} \\ \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,x} & \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{n}_{j,2,x} \\ \Delta \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{j,2}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} (\hat{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}),\end{aligned}$$

kde

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} \ni \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,x} & \hat{n}_{j,1,x} \hat{n}_{j,2,y} \\ \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,x} & \hat{n}_{j,1,y} \hat{n}_{j,2,y} \end{bmatrix},$$

$\hat{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_e \in \mathbb{R}^{2 \times 2|\mathcal{J}|}$  a  $\Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{J}|}$ . Stejným způsobem rozepíšeme a upravíme druhý zlomek součtu v předpisu pro  $\Delta \hat{\mathbf{n}}_j$

$$\frac{\hat{\mathbf{n}}_{j,1} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,1}}{l_{j,1}} \hat{\mathbf{n}}_{j,2} = \frac{1}{l_{j,1}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T (\hat{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}).$$

Zbývající dva členy součtu odpovídají úpravám

$$\begin{aligned}l_{j,2} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,1} &= l_{j,2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}), \\ l_{j,1} \Delta \hat{\mathbf{n}}_{j,2} &= l_{j,1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}),\end{aligned}$$

kde matice  $\underline{\underline{\mathbf{I}}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je jednotková matice.

Nyní, když máme upraveny jednotlivé členy vztahu (3.9), můžeme přejít k maticovému tvaru normálového vektoru  $\Delta \hat{\mathbf{n}}_j$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{n}}_j &= \frac{1}{l_{j,2}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} (\hat{\mathbf{P}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + l_{j,2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\mathbf{P}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + \frac{1}{l_{j,1}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T (\hat{\mathbf{P}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + l_{j,1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\mathbf{P}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) = \\ &= \frac{1}{l_{j,1}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T (\hat{\mathbf{P}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + l_{j,2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\mathbf{P}}_1 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + \frac{1}{l_{j,2}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} (\hat{\mathbf{P}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) + l_{j,1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} (\hat{\mathbf{P}}_2 \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) = \quad (3.10) \\ &= \left[ \left( \frac{1}{l_{j,1}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T + l_{j,2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \hat{\mathbf{P}}_1 + \left( \frac{1}{l_{j,2}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} + l_{j,1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \hat{\mathbf{P}}_2 \right] \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}} = \hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}, \end{aligned}$$

kde matice  $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2|\mathcal{J}|}$  má podobný význam jako matice  $\hat{\mathbf{P}}_e$ .

Dostali jsme se do bodu, kdy jsme schopni napočítat derivaci nejednotkové normály  $\Delta \hat{\mathbf{n}}_j$ , kterou využijeme pro výpočet směrové derivace normované normály  $\Delta \underline{\mathbf{n}}_j$ . Pro normovanou normálu  $\underline{\mathbf{n}}_j$  ve slave uzlu  $j$  platí vztah

$$\underline{\mathbf{n}}_j = \frac{\underline{\mathbf{n}}_{j,1} + \underline{\mathbf{n}}_{j,2}}{\|\underline{\mathbf{n}}_{j,1} + \underline{\mathbf{n}}_{j,2}\|} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_j}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|}, \quad (3.11)$$

kde jsme za součty v prvním zlomku (3.11) dosadili výraz (3.8). Obdržíme tak výraz pro derivaci normované normály  $\Delta \underline{\mathbf{n}}_j$

$$\Delta \underline{\mathbf{n}}_j = \Delta \left( \frac{\hat{\mathbf{n}}_j}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} \right) = \frac{\Delta \hat{\mathbf{n}}_j}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} - \frac{(\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_j) \hat{\mathbf{n}}_j}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3}. \quad (3.12)$$

Opět budeme chtít vyjádřit výraz (3.12) v maticovém tvaru. Toho docílíme následující úpravou

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{n}}_j &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} \Delta \hat{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} (\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \Delta \hat{\mathbf{n}}_j) \hat{\mathbf{n}}_j = \\ &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} (\hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} (\hat{n}_{j,x} \Delta \hat{n}_{j,x} + \hat{n}_{j,y} \Delta \hat{n}_{j,y}) \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,x} \\ \hat{n}_{j,y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} (\hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,x} \Delta \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,x} + \hat{n}_{j,y} \Delta \hat{n}_{j,y} \hat{n}_{j,x} \\ \hat{n}_{j,x} \Delta \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,y} + \hat{n}_{j,y} \Delta \hat{n}_{j,y} \hat{n}_{j,y} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} (\hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,x} & \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,y} \\ \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,y} & \hat{n}_{j,y} \hat{n}_{j,y} \end{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{n}}_j = \\ &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} (\hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} \underline{\underline{\mathbf{W}}} (\hat{\mathbf{P}} \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}) = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|} \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j\|^3} \underline{\underline{\mathbf{W}}} \right) \hat{\mathbf{P}} \right] \Delta \underline{\underline{\mathbf{d}}}_{\mathcal{J}}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} \ni \underline{\underline{\mathbf{W}}} = \begin{bmatrix} \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,x} & \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,y} \\ \hat{n}_{j,x} \hat{n}_{j,y} & \hat{n}_{j,y} \hat{n}_{j,y} \end{bmatrix}.$$

Získali jsme maticový předpis pro derivaci normované normály  $\Delta \underline{\mathbf{n}}_j$  ve slave uzlu  $j$

$$\Delta \underline{n}_j = \left[ \left( \frac{1}{\|\underline{n}_j\|} \underline{I} - \frac{1}{\|\underline{n}_j\|^3} \underline{W} \right) \hat{\underline{P}} \right] \Delta \underline{d}_{\mathcal{J}} = \underline{\underline{P}} \Delta \underline{d}_{\mathcal{J}}, \quad (3.13)$$

kde  $\underline{\underline{P}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2|\mathcal{J}|}$ .

Zbývá si vyjádřit linearizaci normovaného tečného vektoru  $\Delta \underline{t}_j$ . Pro normovaný tečný vektor  $\underline{t}_j$  platí

$$\underline{t}_j = \underline{e}_3 \times \underline{n}_j,$$

tzn. že platí rovnost

$$\begin{bmatrix} t_{j,x} \\ t_{j,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{j,y} \\ n_{j,x} \end{bmatrix}.$$

Stejným způsobem obdržíme směrovou derivaci normovaného tečného vektoru  $\Delta \underline{t}_j$

$$\Delta \underline{t}_j = \underline{e}_3 \times \Delta \underline{n}_j.$$

To bude mít za následek prohození řádků v matici  $\underline{\underline{P}}$ , resp.

$$\underline{\underline{P}}_t = \begin{bmatrix} -\underline{P}_y \\ \underline{P}_x \end{bmatrix},$$

kde  $\underline{P}_x, \underline{P}_y \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{J}|}$  představují řádkové vektory matice  $\underline{\underline{P}}$  odpovídající příslušné souřadnici vektoru  $\Delta \underline{n}_j$ . Maticový zápis pro  $\Delta \underline{t}_j$  je ve tvaru

$$\Delta \underline{t}_j = \underline{\underline{P}}_t \Delta \underline{d}_{\mathcal{J}}.$$

### 3.2 Linearizace mortarové matice $D$

Jak již bylo řečeno dříve, jednotlivé prvky mortarové matice  $\underline{\underline{D}}$  jsou definovány vztahem

$$D_{jj} = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left( \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g N_{(j,e)}^{(sl)} \left( \underline{\xi}_g^{(sl)} \right) \left| J \left( \underline{\xi}_g^{(sl)} \right) \right| \right),$$

kde  $n_g^{(sl,e)}$  reprezentuje počet Gauss bodů jednoho elementu a  $w_g$  jsou příslušné váhy. Při odvozování linearizace matice  $\underline{\underline{D}}$  se stačí zaměřit pouze na příspěvek jednoho elementu, resp.

$$D_{jj}^{ele} = \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g N_{(j,e)}^{(sl)} \left( \underline{\xi}_g^{(sl)} \right) \left| J \left( \underline{\xi}_g^{(sl)} \right) \right|,$$

a na konci provést součet přes všechny slave elementy výsledného vztahu. Vysvětlení dané problematiky na předpisu pro jeden element bude pro nás výhodnější, protože se zbavíme, alespoň na okamžik, jedné sumy. Jako první provedeme směrovou derivaci  $D_{jj}^{ele}$ , tzn.

$$\begin{aligned}
\Delta D_{jj}^{ele} &= \Delta \left( \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)}) \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| \right) = \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \Delta \left( w_g N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)}) \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| \right) = \\
&= \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g \left[ \frac{\partial N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)})}{\partial \xi} \Delta \xi_g \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| + N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)}) \Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| \right] = \\
&= \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g \frac{\partial N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)})}{\partial \xi} \Delta \xi_g \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| + \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)}) \Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|.
\end{aligned}$$

Podíváme-li se na výše uvedený zápis směrové derivace  $\Delta D_{jj}^{ele}$  detailněji, zjistíme, že nám z výrazu vypadne první suma. Je to způsobeno faktem, že člen  $\Delta \xi_g^{(sl)} = 0$ , protože lokální souřadnice Gauss bodu jsou konstantní (nemění se). Díky tomu se nám předpis pro  $\Delta D_{jj}^{ele}$  zjednoduší na tvar

$$\Delta D_{jj}^{ele} = \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} w_g N_{(j,e)}^{(sl)}(\xi_g^{(sl)}) \Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|.$$

Zbývá si vyjádřit, čemu se rovná směrová derivace Jakobiánu  $\Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|$ . Jakobián  $\left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|$  je definován předpisem

$$\left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| = \left\| \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi}(\xi_g^{(sl)}) \underline{x}_k^{(sl)} \right\|.$$

Připomeňme si, že souřadnice  $\underline{x}$  jsou tvořeny referenčními souřadnicemi  $\underline{X}$  a posunem  $\underline{d}$ , resp.  $\underline{x} = \underline{X} + \underline{d}$ . Směrová derivace Jakobiánu  $\Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|$  bude tedy rovna výrazu

$$\begin{aligned}
\Delta \left| J(\xi_g^{(sl)}) \right| &= \Delta \left\| \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right\| = \Delta \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right)} = \\
&= \frac{1}{\left\| \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right\|} \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \Delta \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) = \\
&= \frac{1}{\left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|} \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial^2 N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} \Delta \xi_g^{(sl)} \underline{x}_k^{(sl)} + \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \underline{x}_k^{(sl)} \right) = \\
&= \frac{1}{\left| J(\xi_g^{(sl)}) \right|} \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \underline{x}_k^{(sl)} \right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

kde  $\Delta \underline{x}_k^{(sl)} = \Delta \underline{d}_k^{(sl)} + \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \xi_g^{(sl)}$  chápeme jako  $\frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g}(\xi_g^{(sl)}) \Delta \xi_g^{(sl)}$ . Během úprav jsme opět využili faktu, že lokální souřadnice Gauss bodu jsou konstantní, a tedy  $\Delta \xi_g^{(sl)} = 0$ . V důsledku



toho je celý člen  $\sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial^2 N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} \Delta \xi_g^{(sl)} \underline{x}_k^{(sl)} = 0$ .

Nyní jsme schopni dosadit již vyjádřenou směrovou derivaci Jakobiánu  $\Delta \left| J \left( \xi_g^{(sl)} \right) \right|$  do předpisu směrové derivace  $\Delta D_{jj}^{ele}$

$$\Delta D_{jj}^{ele} = \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \frac{w_g N_{(j,e)}^{(sl)} \left( \xi_g^{(sl)} \right)}{\left| J \left( \xi_g^{(sl)} \right) \right|} \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \underline{x}_k^{(sl)} \right).$$

Získali jsme vztah pro  $\Delta D_{jj}^{ele}$ . Provedeme-li sumaci přes všechny elementové příspěvky, obdržíme vztah pro linearizaci matice  $\underline{D}$  v jednom slave uzlu  $j$

$$\Delta D_{jj} = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \frac{w_g N_{(j,e)}^{(sl)} \left( \xi_g^{(sl)} \right)}{\left| J \left( \xi_g^{(sl)} \right) \right|} \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \underline{x}_k^{(sl)} \right) \right].$$

Výsledná matice  $\Delta \underline{D}$  je, podobně jako matice  $\underline{D}$ , složená z jednotlivých  $2 \times 2$  bloků

$$\Delta \underline{D}_{jj} = \Delta D_{jj} \underline{I},$$

kde  $\underline{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je jednotková matice. Jeden  $2 \times 2$  blok odpovídá vždy jednomu slave uzlu  $j$  ( $x$ -ová a  $y$ -ová souřadnice uzlu).

Matice  $\Delta \underline{D} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{S}|}$  je tedy ve tvaru

$$\Delta \underline{D} = \begin{bmatrix} \Delta D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta D_{|\mathcal{S}||\mathcal{S}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta D_{|\mathcal{S}||\mathcal{S}|} \end{bmatrix}.$$

Závěrem sekce si popíšeme jakým způsobem jsme schopni docílit následující rovnosti

$$\Delta \underline{D} = \Delta \underline{D} \Delta \underline{d}, \quad \text{podrobněji } \Delta \underline{D}(\underline{d}, \Delta \underline{d}) = \Delta \underline{D}(\underline{d}) \Delta \underline{d}, \quad (3.15)$$

kde  $\Delta \underline{D} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{D}|}$  a  $\Delta \underline{d} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{D}|}$ , kterou využijeme ke konci této kapitoly. Výraz na pravé straně rovnosti (3.15) získáme následující úpravou vztahu pro  $\Delta D_{jj}$ . Ukázkou úpravy provedeme pro případ LINE2 elementů, kdy  $n_n^{(sl,e)} = 2$ :

$$\Delta D_{jj} = \sum_{e=1}^{n_e^{(sl)}} \left[ \sum_{g=1}^{n_g^{(sl,e)}} \overbrace{\frac{w_g N_{(j,e)}^{(sl)} \left( \xi_g^{(sl)} \right)}{\left| J \left( \xi_g^{(sl)} \right) \right|}}^{\text{číslo}} \overbrace{\left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \underline{x}_k^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta \underline{x}_k^{(sl)} \right)}^{\text{rozepíšeme pro } k=1, 2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \right) \\ \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,x}^{(sl)} \right) \\ \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,y}^{(sl)} \right) \end{bmatrix} \\
& \Downarrow \\
& \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,g)}^{(sl)}}{\partial \xi} \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,x}^{(sl)} + \\
& + \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \Delta x_{2,y}^{(sl)} \\
& \Downarrow \\
& \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \right) \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \right) \Delta x_{2,x}^{(sl)} + \\
& + \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \right) \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \left( \frac{\partial N_{(1,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} + \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \frac{\partial N_{(2,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \right) \Delta x_{2,y}^{(sl)}
\end{aligned}$$

Opět  $\frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi_g}$  chápeme jako  $\frac{\partial N_{(k,e)}^{(sl)}}{\partial \xi} \left( \xi_g^{(sl)} \right)$ . Následně dosadíme tímto způsobem upravený skalární součin zpět do vztahu pro  $\Delta D_{jj}$  a vytkneme z něj  $\Delta \underline{d}$  (nezapomeňme, že  $\Delta \underline{x}_k^{(sl)} = \Delta \underline{d}_k^{(sl)}$ ). Dostaneme výsledný zápis ve tvaru

$$\Delta \underline{\underline{D}} = \Delta \underline{\underline{D}} \Delta \underline{d}. \quad (3.16)$$

### 3.3 Linearizace mortarové matice $M$

Před samotným procesem linearizace matice  $\underline{\underline{M}}$  je nutné si připomenout, jaký je předpis pro její výpočet, resp. výpočet prvku  $M_{jl}$

$$M_{jl} = \sum_{s=1}^{n_s} \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} \left[ w_g \Psi_{(j,s)} \left( \xi_s^{(sl)}(\eta_g) \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \xi_s^{(m)}(\eta_g) \right) J_s(\eta_g) \right],$$

kde

$$J_s(\eta) = \left\| \frac{\partial \underline{x}^{(sl)h}}{\partial \xi^{(sl)}} \right\| \left\| \frac{\partial \xi^{(sl)}}{\partial \eta} \right\| = J \left( \xi^{(sl)}(\eta) \right) \frac{\xi_b^{(sl)} - \xi_a^{(sl)}}{2}.$$

Aby nás zbytečně nezatěžovala suma přes všechny segmenty, stačí provést odvození linearizace matice  $\underline{\underline{M}}$  pouze pro jeden segment prvku  $M_{jl}$ . Sumace přes všechny segmenty se provede až na konci linearizačního procesu matice  $\underline{\underline{M}}$ . Pro jednoduchost a jednotnost zápisu si Gauss body na slave  $\xi_s^{(sl)}(\eta_g)$  a na master  $\xi_s^{(m)}(\eta_g)$  označíme jako  $\xi_g^{(sl)}$  a  $\xi_g^{(m)}$ . Pak předpis  $M_{jl}$  pro jeden segment odpovídá výrazu

$$M_{jl}^{seg} = \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \zeta_g^{(m)} \right) J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\zeta_b^{(sl)} - \zeta_a^{(sl)}}{2}.$$

Nyní přejdeme k vyjádření směrové derivace vztahu  $M_{jl}^{seg}$

$$\begin{aligned} \Delta M_{jl}^{seg} &= \Delta \left[ \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \zeta_g^{(m)} \right) J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\zeta_b^{(sl)} - \zeta_a^{(sl)}}{2} \right] = \\ &= \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Delta \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \zeta_g^{(m)} \right) J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\zeta_b^{(sl)} - \zeta_a^{(sl)}}{2} + \\ &+ \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \zeta_g^{(m)}} \left( \zeta_g^{(m)} \right) \Delta \zeta_g^{(m)} J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\zeta_b^{(sl)} - \zeta_a^{(sl)}}{2} + \\ &+ \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \zeta_g^{(m)} \right) \Delta J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\zeta_b^{(sl)} - \zeta_a^{(sl)}}{2} + \\ &+ \sum_{g=1}^{n_g^{(s)}} w_g \Psi_{(j,s)} \left( \zeta_g^{(sl)} \right) N_{(l,s)}^{(m)} \left( \zeta_g^{(m)} \right) J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \frac{\Delta \zeta_b^{(sl)} - \Delta \zeta_a^{(sl)}}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde  $\zeta_a^{(sl)}, \zeta_b^{(sl)}$  představují koncové body segmentu na slave. Stejným způsobem jsou označeny i koncové body segmentu na master a to  $\zeta_a^{(m)}, \zeta_b^{(m)}$ .

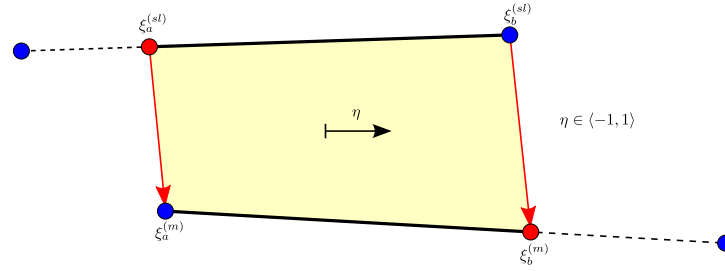
Pokud se podíváme na jednotlivé členy součtu detailněji, všimneme si, že ve vztahu pro  $M_{jl}^{seg}$  vystupují derivace  $\Delta \Phi_j \left( \zeta_g^{(sl)} \right), \Delta \zeta_g^{(m)}, \Delta J \left( \zeta_g^{(sl)} \right), \Delta \zeta_a^{(sl)}$  a  $\Delta \zeta_b^{(sl)}$ , které bude potřeba vyjádřit. Mimo tyto uvedené derivace bude také nutné si odvodit vztahy pro výpočet derivací  $\Delta \zeta_g^{(sl)}, \Delta \zeta_a^{(m)}$  a  $\Delta \zeta_b^{(m)}$ , které se nám objeví při odvozování výše uvedených derivací.

Nejprve se zaměříme na výpočet derivací koncových bodů segmentů  $\Delta \zeta_a^{(sl)}, \Delta \zeta_b^{(sl)}, \Delta \zeta_a^{(m)}, \Delta \zeta_b^{(m)}$  a na ně navážeme výpočtem derivací Gaussových bodů  $\Delta \zeta_g^{(sl)}, \Delta \zeta_g^{(m)}$ . Poznamenejme, že koncové body segmentu na master, ale i na slave, nabývají hodnot z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Navíc pro koncové body segmentu  $\zeta_a^{(sl)}, \zeta_b^{(sl)}, \zeta_a^{(m)}, \zeta_b^{(m)}$  existují dvě možné varianty. Bud' se můžou

- I. shodovat s uzlem elementu příslušného povrchu (slave nebo master)
- II. nebo se můžou shodovat se zobrazením  $\chi : \gamma_C^{(sl)} \rightarrow \gamma_C^{(m)}$ , tzn. s projekcí slave uzlu na master element, respektive se zobrazením  $\chi^{-1}$ , tzn. projekcí master uzlu na slave element.

Je zřejmé, že v prvním případě (I.) shody s uzlem elementu (například  $\zeta_a^{(sl)} = -1$  nebo  $\zeta_a^{(sl)} = 1$ ) bude linearizace souřadnic nulová. Ve druhém případě (II.) se budeme zabývat linearizací zmíněné projekce. Pozor na situaci, kdy nastanou oba případy (I. i II.), zde je nutno klasifikovat je jako druhý případ (II.), jelikož zde by linearizace nebyla nulová. Uved' me si ještě jednou detailní náhled na jeden segment, aby případný čtenář nemusel

při odvozování jednotlivých derivací koncových bodů segmentu listovat napříč kapitolami.



Obrázek 3.1: Ukázka jednoho segmentu

**Případ**  $\xi_b^{(sl)} \in \{-1, 1\}$

Rozeberme si první případ, který může nastat. Týká se dvojice bodů  $\xi_b^{(sl)}$ ,  $\xi_b^{(m)}$  zobrazených na obrázku 3.1, ve kterém jsou modrou barvou označeny uzly elementu příslušného povrchu a červenou barvou body vzniklé projekcí uzlu z protějšího povrchu.

Nechť  $\xi_b^{(sl)}$  je uzel na slave, tzn.  $\xi_b^{(sl)} \in \{-1, 1\}$ , pak

$$\Delta \xi_b^{(sl)} = 0,$$

a tedy pro vyjádření  $\Delta \xi_b^{(m)}$ , kde  $\xi_b^{(m)}$  představuje projekci slave uzlu  $\underline{x}_b^{(sl)}$  na master element  $e$  s uzly  $\underline{x}_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, n_n^{(m,e)}$ , vyjdeme z předpisu pro příslušnou projekci

$$\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s)}^{(m)} \left( \xi_b^{(m)} \right) \underline{x}_l^{(m)} \right) - \underline{x}_b^{(sl)} \right] \times \underline{n}_b = \underline{0},$$

kde  $\underline{n}_b = (n_{b,x}, n_{b,y})^T$  je jednotkový normálový vektor ve slave uzlu  $\underline{x}_b^{(sl)} = (x_b^{(sl)}, y_b^{(sl)})^T$ . Vyjádříme si vektorový součin

$$\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s)}^{(m)} \left( \xi_b^{(m)} \right) x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] n_{b,y} - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s)}^{(m)} \left( \xi_b^{(m)} \right) x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{b,y}^{(sl)} \right] n_{b,x} = 0.$$

Rovnici zderivujeme (pro lepší přehlednost následujících zápisů budeme  $N_{(l,s)}^{(m)} \left( \xi_b^{(m)} \right)$  značit jako  $N_{(l,s),b}^{(m)}$  a  $\frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi} \left( \xi_b^{(m)} \right)$  jako  $\frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b}$  )

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] n_{b,y} + \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,y} - \\ & - \Delta \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{b,y}^{(sl)} \right] n_{b,x} - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{b,y}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,x} = 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,x}^{(m)} + \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,x}^{(m)} \right) - \Delta x_{b,x}^{(sl)} \right] n_{b,y} + \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,y} - \\
& - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,y}^{(m)} + \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,y}^{(m)} \right) - \Delta x_{b,y}^{(sl)} \right] n_{b,x} - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{b,y}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,x} = 0
\end{aligned}$$

a roznásobíme

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} + \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} - \Delta x_{b,x}^{(sl)} n_{b,y} - \\
& - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} + \Delta x_{b,y}^{(sl)} n_{b,x} + \\
& + \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) \Delta n_{b,y} - x_{b,x}^{(sl)} \Delta n_{b,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) \Delta n_{b,x} + x_{b,y}^{(sl)} \Delta n_{b,x} = 0.
\end{aligned}$$

Z takto upravené rovnice si vyjádříme čemu se rovná  $\Delta \xi_b^{(m)}$

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} \Delta \xi_b^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} = \\
& = - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} + \Delta x_{b,x}^{(sl)} n_{b,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) \Delta n_{b,y} + x_{b,x}^{(sl)} \Delta n_{b,y} + \\
& + \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} - \Delta x_{b,y}^{(sl)} n_{b,x} + \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) \Delta n_{b,x} - x_{b,y}^{(sl)} \Delta n_{b,x}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
& \Delta \xi_b^{(m)} \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \xi_b} x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} \right] = \\
& = - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,x}^{(m)} \right) - \Delta x_{b,x}^{(sl)} \right] n_b^y - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,y} + \\
& + \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,y}^{(m)} \right) - \Delta x_{b,y}^{(sl)} \right] n_b^x + \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{b,y}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,x}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
\Delta \zeta_b^{(m)} = & \frac{1}{\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \zeta_b} x_{l,x}^{(m)} \right) n_{b,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \zeta_b} x_{l,y}^{(m)} \right) n_{b,x} \right]} \times \\
& \times \left[ \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,y}^{(m)} \right) - \Delta y_b^{(sl)} \right] n_{b,x} - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} \Delta x_{l,x}^{(m)} \right) - \Delta x_{b,x}^{(sl)} \right] n_{b,y} + \right. \\
& \left. + \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - y_b^{(sl)} \right] \Delta n_{b,x} - \left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),b}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) - x_{b,x}^{(sl)} \right] \Delta n_{b,y} \right]. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Směrovou derivaci  $\Delta \underline{n}_b = (\Delta n_{b,x}, \Delta n_{b,y})^T$  vypočítáme pomocí známého předpisu (3.13) ze sekce „Linearizace normálového a tečného vektoru“.

**Případ**  $\zeta_{\#}^{(m)} \in \{-1, 1\}$

Nyní se podívejme na druhou variantu týkající se dvojice  $\zeta_a^{(m)}, \zeta_a^{(sl)}$  z obrázku 3.1. Nechť  $\zeta_a^{(m)}$  odpovídá uzlu na *Master*, pak

$$\Delta \zeta_a^{(m)} = 0$$

a pro vyjádření  $\Delta \zeta_a^{(sl)}$  výjdeme z předpisu projekce *Master* uzlu  $\underline{x}_a^{(m)}$  na slave element  $e$  s uzly  $\underline{x}_k^{(sl)}, k = 1, \dots, n_n^{(sl,e)}$

$$\left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) \underline{x}_k^{(sl)} \right) - \underline{x}_a^{(m)} \right] \times \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) \underline{n}_k \right] = \underline{0},$$

kde  $\underline{n}_k = (n_{k,x}, n_{k,y})^T$  je jednotková normála ve slave uzlu  $\underline{x}_k^{(sl)}$ . Vyjádříme výše uvedený vektorový součin

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) n_{j,y} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s)}^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right) n_{j,x} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Rovnici zderivujeme (provedeme obdobné přeznačení  $N_k^{(sl)} \left( \zeta_a^{(sl)} \right)$  na  $N_{(k,s),a}^{(sl)}$  a  $\frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_a} \left( \zeta_a^{(sl)} \right)$  na  $\frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_a}$ )

$$\begin{aligned}
& \Delta \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \Delta \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] - \\
& - \Delta \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \Delta \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] = 0
\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} \Delta \xi_a^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} + \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,x}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] + \\
& + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{j,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} \Delta \xi_a^{(sl)} n_{k,y} + \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,y} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} \Delta \xi_a^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} + \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,y}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} \Delta \xi_a^{(sl)} n_{k,x} + \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,x} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Opět provedeme roznásobení a současně dáme na pravou stranu pouze členy neobsahující  $\Delta \xi_a^{(sl)}$

$$\begin{aligned}
& \Delta \xi_a^{(sl)} \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} x_{k,x}^{(sl)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] + \Delta \xi_a^{(sl)} \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{j=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} n_{k,y} \right] - \\
& - \Delta \xi_a^{(sl)} \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} x_{k,y}^{(sl)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] - \Delta \xi_a^{(sl)} \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} n_{k,x} \right] = \\
& = - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,x}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,y} \right] + \\
& + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,y}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,x} \right].
\end{aligned}$$

Z takto upravené rovnice vyjádříme  $\Delta \xi_a^{(sl)}$ , dostaneme

$$\Delta \xi_a^{(sl)} = \frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}}, \quad (3.19)$$

kde

$$\begin{aligned}
\text{čitatel} &= \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,y}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] + \\
& + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,x} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta x_{k,x}^{(sl)} \right) - \Delta x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} \Delta n_{k,y} \right], \\
\text{jmenovatel} &= \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} x_{k,x}^{(sl)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,y} \right] + \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{a,x}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} n_{k,y} \right] - \\
& - \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} x_{k,y}^{(sl)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} n_{k,x} \right] - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),a}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{a,y}^{(m)} \right] \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(k,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_a} n_{k,x} \right].
\end{aligned}$$

Směrovou derivaci  $\Delta \underline{n}_j = (\Delta n_{j,x}, \Delta n_{j,y})^T$  můžeme opět vypočítat podle známého předpisu (3.13) ze sekce „Linearizace normálového a tečného vektoru“.

Výše uvedený proces linearizace provedeme analogicky i pro koncové body  $\tilde{\zeta}_a^{(sl)}$  a  $\tilde{\zeta}_b^{(m)}$ , které budou shodné s uzlem patřičného povrchu.

Nyní, když známe vztahy pro linearizaci koncových bodů segmentu, můžeme přejít ke směrovým derivacím Gauss bodů  $\tilde{\zeta}_g^{(sl)}$  a  $\tilde{\zeta}_g^{(m)}$ , při jejichž vyjádření jsme brali ohled na mapování ze segmentových souřadnic  $\eta$  na elementové souřadnice  $\zeta^{(\#)}$

$$\Delta \tilde{\zeta}_g^{(\#)} = \frac{1}{2}(1 - \eta_g)\Delta \tilde{\zeta}_a^{(\#)} + \frac{1}{2}(1 + \eta_g)\Delta \tilde{\zeta}_b^{(\#)}, \quad \# \in \{sl, m\}. \quad (3.20)$$

Dostali jsme se do bodu, kdy jsme schopni spočítat druhý a čtvrtý člen součtu (3.17). Dokonce jsme schopni vypočítat i třetí člen součtu (3.17), protože pro derivaci Jakobiánu  $\Delta \left| J \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \right|$  platí

$$\Delta \left| J \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \right| = \frac{1}{\left| J \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \right|} \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \tilde{\zeta}_g} \underline{x}_l^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial^2 N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \tilde{\zeta}_g^2} \Delta \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \underline{x}_l^{(sl)} + \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \tilde{\zeta}_g} \Delta \underline{x}_l^{(sl)} \right). \quad (3.21)$$

Derivace Jakobiánu  $\Delta \left| J \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \right|$  (3.21) má obdobný tvar jako derivace Jakobiánu  $\Delta \left| J \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \right|$  (3.14) v předchozí sekci „Linearizace mortarové matice  $D$ “, ale v tomto případě není derivace  $\Delta \tilde{\zeta}_g^{(sl)}$  obecně nulová, protože jeden z koncových bodů nebo oba dva koncové body segmentu na slave se mohou shodovat s projekcí master uzlu na slave povrch.

Zbývá nám si vyjádřit derivaci duální tvarové funkce  $\Delta \Psi_j \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right)$ , která je zahrnuta v prvním členu součtu (3.17). Derivace  $\Delta \Psi_j \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right)$  je rovna

$$\Delta \Psi_j \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) = \frac{\partial \Psi_j}{\partial \underline{d}} \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \Delta \underline{d} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial \tilde{\zeta}} \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \Delta \tilde{\zeta}_g^{(sl)}. \quad (3.22)$$

Člen  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \underline{d}} \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \Delta \underline{d}$  odpovídá směrové derivaci duální tvarové funkce s ohledem na posun  $\underline{d}$ . Jeho hodnota je v našem případě, kdy používáme pouze lineární LINE2 elementy, rovna nule. Kdybychom počítali s LINE3 elementy, tak by tento člen byl nenulový a jeho linearizace je k nalezení v [3], kapitola A.5. V našem případě jsou duální tvarové funkce

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} (1 - 3\zeta), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} (1 + 3\zeta)$$

nezávislé na  $\underline{d}$ . Předpis pro výpočet derivace  $\Delta \tilde{\zeta}_g^{(sl)}$ , která je obsažená ve členu  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \tilde{\zeta}} \left( \tilde{\zeta}_g^{(sl)} \right) \Delta \tilde{\zeta}_g^{(sl)}$ , je pro nás již znám.

V posledním kroku linearizace mortarové matice  $\underline{M}$  dosadíme vyjádřené derivace do předpisu pro  $\Delta M_{jl}^{seg}$  a provedeme sumaci přes všechny segmenty.

Pokud dosadíme  $\Delta M_{jl}$  na příslušnou pozici matice  $\underline{M}$ , získáme její celkovou linearizaci, kterou označíme jako  $\Delta \underline{M}$ . Opět se pokusíme přejít ze zápisu  $\Delta \underline{M} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{M}|}$  na zápis ve tvaru  $\Delta \underline{M} \Delta \underline{d}$ , kde  $\Delta \underline{M} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{M}| \times 2|\mathcal{D}|}$ . Uvedeme si zde pouze ukázkou (šablonu) jak k tomuto zápisu dojít. Nejprve si vytkneme  $\Delta \underline{d}$  z  $\Delta \tilde{\zeta}_a^{(sl)}$ ,  $\Delta \tilde{\zeta}_b^{(sl)}$ ,  $\Delta \tilde{\zeta}_a^{(m)}$ ,  $\Delta \tilde{\zeta}_b^{(m)}$ ,



$\Delta\zeta_g^{(sl)}$  a  $\Delta\zeta_g^{(m)}$ . Pro  $\Delta\zeta_{\#}^{(sl)}$ ,  $\# \in \{a, b\}$ , platí vztah (3.19). Vzhledem k tomu, že  $\frac{1}{jmenovatel}$  nezávisí na  $\Delta\mathbf{d}$ , budeme se zabývat vytknutím  $\Delta\mathbf{d}$  z čitatele. Při úpravě budeme uvažovat lineární elementy s  $n_n^{(sl,e)} = 2$ .

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{k,y}^{(sl)} \right) - \Delta x_{\#,y}^{(m)} \right] \overbrace{\left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} n_{k,x} \right]}^{=c_1} + \\
& + \overbrace{\left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} x_{k,y}^{(sl)} \right) - x_{\#,y}^{(m)} \right]}^{=c_3} \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{k,x} \right] - \\
& - \left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{k,x}^{(sl)} \right) - \Delta x_{\#,x}^{(m)} \right] \overbrace{\left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} n_{k,y} \right]}^{=c_2} - \\
& - \overbrace{\left[ \left( \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} x_{k,x}^{(sl)} \right) - x_{\#,x}^{(m)} \right]}^{=c_4} \left[ \sum_{k=1}^{n_n^{(sl,e)}} N_{(k,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{k,y} \right] \\
& \Downarrow \\
& - c_2 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{1,x}^{(sl)} - c_2 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{2,x}^{(sl)} + c_2 \Delta x_{\#,x}^{(m)} + c_3 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{1,x} + c_3 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{2,x} + \\
& + c_1 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + c_1 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \Delta x_{2,y}^{(sl)} - c_1 \Delta x_{\#,y}^{(m)} - c_4 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{1,y} - c_4 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \Delta n_{2,y} \\
& \Downarrow \\
& \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad c_2 \quad -c_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -c_2 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \quad c_1 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \quad -c_2 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \quad c_1 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \Delta\mathbf{d} + \\
& + c_3 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \mathbf{P}_{1,x} \Delta\mathbf{d}_{\mathcal{S}} + c_3 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \mathbf{P}_{2,x} \Delta\mathbf{d}_{\mathcal{S}} - c_4 N_{(1,s),\#}^{(sl)} \mathbf{P}_{1,y} \Delta\mathbf{d}_{\mathcal{S}} - c_4 N_{(2,s),\#}^{(sl)} \mathbf{P}_{2,y} \Delta\mathbf{d}_{\mathcal{S}} \\
& \Downarrow \\
& \text{doplníme vektory } \mathbf{P} \text{ a vektor } \Delta\mathbf{d}_{\mathcal{S}} \text{ o nuly na délku vektoru } \Delta\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{D}|} \\
& \Downarrow \\
& \Delta\zeta_{\#}^{(sl)} = \underline{\text{Vektor}}_{sl,\#} \Delta\mathbf{d}, \# \in \{a, b\}
\end{aligned}$$

Pro  $\Delta\zeta_{\#}^{(m)}$ ,  $\# \in \{a, b\}$ , platí vztah (3.19), kde první člen součinu

$$\frac{1}{\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \zeta_{\#}} x_{l,x}^{(m)} \right) n_{\#,y} - \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(m)}}{\partial \zeta_{\#}} x_{l,y}^{(m)} \right) n_{\#,x} \right]}$$

reprezentuje nějakou konstantu. V důsledku toho se zaměříme na druhý člen součinu, který si upravíme do požadovaného tvaru. Opět uvažujeme lineární elementy

$$s n_n^{(m,e)} = 2.$$

$$\begin{aligned}
& -n_{b,y} N_{(1,s),\#}^{(m)} \Delta x_{1,x}^{(m)} - n_{\#,y} N_{(2,s),\#}^{(m)} \Delta x_{2,x}^{(m)} + n_{\#,y} \Delta x_{\#,x}^{(sl)} + \\
& + n_{b,x} N_{(1,s),\#}^{(m)} \Delta x_{1,y}^{(m)} + n_{\#,x} N_{(2,s),\#}^{(m)} \Delta x_{2,y}^{(m)} - n_{\#,x} \Delta x_{\#,y}^{(sl)} + \\
& + \overbrace{\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),\#}^{(m)} x_{l,y}^{(m)} \right) - x_{\#,y}^{(sl)} \right]}^{=c_1} \Delta n_{\#,x} - \overbrace{\left[ \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(m,e)}} N_{(l,s),\#}^{(m)} x_{l,x}^{(m)} \right) + x_{\#,x}^{(sl)} \right]}^{=c_2} \Delta n_{\#,y} \\
& \Downarrow \\
& \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \dots & 0 & -n_{\#,y} N_{(1,s),\#}^{(m)} & n_{\#,x} N_{(1,s),\#}^{(m)} & -n_{\#,y} N_{(2,s),\#}^{(m)} & n_{\#,x} N_{(2,s),\#}^{(m)} & 0 & \dots & 0 & n_{\#,y} & -n_{\#,x} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \Delta \underline{d} \\
& + c_1 \underline{P}_{\#,x} \Delta \underline{d} - c_2 \underline{P}_{\#,y} \Delta \underline{d} \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

doplníme vektory  $\underline{P}$  a vektor  $\Delta \underline{d}$  o nuly na délku vektoru  $\Delta \underline{d} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{D}|}$

$\Downarrow$

$$\Delta \zeta_{\#}^{(m)} = \underline{\text{Vektor}}_{m,\#} \Delta \underline{d}, \# \in \{a, b\}$$

Pro  $\Delta \zeta_g^{(\#)}, \# \in \{sl, m\}$  platí vztah (3.20). Na základě odvozování, které jsme provedli výše, a předpokladu, že jeden nebo druhý koncový bod segmentu je shodný s uzlem elementu příslušného povrchu, bude pro  $\Delta \zeta_g^{(\#)}$  platit

$$\begin{aligned}
\Delta \zeta_g^{(\#)}, \# \in \{sl, m\} & \Rightarrow \frac{1}{2} (1 - \eta_g) \underline{\text{Vektor}}_{\#,a} \Delta \underline{d} \quad \vee \quad \frac{1}{2} (1 + \eta_g) \underline{\text{Vektor}}_{\#,b} \Delta \underline{d} \quad \vee \\
& \vee \quad \left[ \frac{1}{2} (1 - \eta_g) \underline{\text{Vektor}}_{\#,a} + \frac{1}{2} (1 + \eta_g) \underline{\text{Vektor}}_{\#,b} \right] \Delta \underline{d}.
\end{aligned}$$

V dalším kroku si vytkneme  $\Delta \underline{d}$  z  $\Delta \left| J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \right|$ , které odpovídá předpis (3.21). Budeme uvažovat lineární elementy s  $n_n^{(sl,e)} = 2$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \left| J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \right| & = \overbrace{\frac{1}{\left| J \left( \zeta_g^{(sl)} \right) \right|}}^{=c_1} \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} x_l^{(sl)} \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial^2 N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^2} \Delta \zeta_g^{(sl)} x_l^{(sl)} + \sum_{l=1}^{n_n^{(sl,e)}} \frac{\partial N_{(l,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} \Delta x_l^{(sl)} \right) \\
& \Downarrow \\
& \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} x_{2,x}^{(sl)} \\ \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} x_{2,y}^{(sl)} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^2} \Delta \zeta_g^{(sl)} x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^2} \Delta \zeta_g^{(sl)} x_{2,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} \Delta x_{2,x}^{(sl)} \\ \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^2} \Delta \zeta_g^{(sl)} x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^2} \Delta \zeta_g^{(sl)} x_{2,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \zeta_g^{(sl)}} \Delta x_{2,y}^{(sl)} \end{array} \right] \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\left[ \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} (x_{1,x}^{(sl)})^2 + \left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} \right) x_{1,x}^{(sl)} x_{2,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} (x_{2,x}^{(sl)})^2 \right]}^{=c_1} \Delta \xi_g^{(sl)} + \\
& + \overbrace{\left[ \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} (x_{1,y}^{(sl)})^2 + \left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} \right) x_{1,y}^{(sl)} x_{2,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial^2 N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g^2} (x_{2,y}^{(sl)})^2 \right]}^{=c_2} \Delta \xi_g^{(sl)} + \\
& + \overbrace{\left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \right)}^{=c_3} \Delta x_{1,x}^{(sl)} + \overbrace{\left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,x}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,x}^{(sl)} \right)}^{=c_4} \Delta x_{2,x}^{(sl)} + \\
& + \overbrace{\left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \right)}^{=c_5} \Delta x_{1,y}^{(sl)} + \overbrace{\left( \frac{\partial N_{(1,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{1,y}^{(sl)} + \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} \frac{\partial N_{(2,s)}^{(sl)}}{\partial \xi_g} x_{2,y}^{(sl)} \right)}^{=c_6} \Delta x_{2,y}^{(sl)} \\
& \quad \Downarrow \\
& c_1 \Delta \xi_g^{(sl)} + c_2 \Delta \xi_g^{(sl)} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & c_3 & c_5 & c_4 & c_6 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{d}
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do vztahu výše odvozenou derivaci  $\Delta \xi_g^{(sl)}$ , dostaneme

$$\Delta \left| J \left( \xi_g^{(sl)} \right) \right| = \underline{\text{Vektor}}_J \Delta \underline{d}.$$

Zbývá nám si vytknout  $\Delta \underline{d}$  z

$$\Delta \Psi_j \left( \xi_g^{(sl)} \right) = \frac{\partial \Psi_j}{\partial \underline{d}} \left( \xi_g^{(sl)} \right) \Delta \underline{d} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} \left( \xi_g^{(sl)} \right) \Delta \xi_g^{(sl)}.$$

První člen  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \underline{d}} \left( \xi_g^{(sl)} \right) \Delta \underline{d} = 0$ . Když dosadíme za  $\Delta \xi_g^{(sl)}$  již známý vektorový zápis, dostaneme ve výsledku

$$\Delta \Psi_j \left( \xi_g^{(sl)} \right) = \underline{\text{Vektor}}_\Psi \Delta \underline{d}.$$

Po dosazení všech vektorových zápisů do předpisu pro  $M_{jl}^{seg}$  obdržíme konečný maticový zápis linearizace mortarové matice  $\underline{\underline{M}}$  ve tvaru

$$\Delta \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\Delta M}} \Delta \underline{d} \quad (3.23)$$

### 3.4 Linearizace doplňkové funkce

Pro slave uzel  $j \in \mathcal{S}$  máme v normálovém směru podmínku v druhé rovnici (3.6), tedy

$$C_j (\underline{d}, \underline{z}_j) = 0 \quad \forall j \in \mathcal{S},$$

kde  $C_j$  představuje tzv. doplňkovou funkci, jejíž předpis je

$$C_j (\underline{d}, \underline{z}_j) = (z_n)_j - \max \left( 0, (z_n)_j - c_n \tilde{g}_j \right), \quad c_n > 0.$$

Připomeňme si, že pro  $(z_n)_j$  platí vztah

$$(z_n)_j = \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k.$$

Použijeme-li na na výše uvedené omezení Newtonovu metodu, pak pro krok  $k$  semihladké Newtonovy metody dostaneme

$$\begin{aligned} C_j(\underline{d}^{k+1}, \underline{z}_j^{k+1}) &= C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k) + \Delta C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k) = 0 \\ \Delta C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k) &= -C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k) \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Jelikož funkce  $C_j$  je spojitá, ale je nehladká, nelze jednoznačně určit derivaci v  $(z_n)_j - c_n \tilde{g}_j = 0$ . Z tohoto důvodu si zadefinujeme zobecněnou derivaci funkce  $\max(a, x)$ , pro kterou platí

$$f(x) = \max(a, x) \longrightarrow \Delta f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \leq a \\ 1, & \text{pokud } x > a \end{cases},$$

a pomocí ní vyjádříme směrovou derivaci  $\Delta C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k)$

$$\Delta C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k) = \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - \psi_A(\Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - c_n \Delta \tilde{g}_j^k)$$

a dosadíme  $\Delta C_j(\underline{d}^k, \underline{z}_j^k)$  zpět do (3.24), obdržíme

$$\Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - \psi_A(\Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - c_n \Delta \tilde{g}_j^k) = -\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \max(0, \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k). \quad (3.25)$$

Symbol  $\psi_A$  můžeme interpretovat jako charakteristickou funkci aktivní množiny  $\mathcal{A}_k$ , protože nám dělí rovnici (3.25) na aktivní část, pro kterou je  $\psi_a = 1$  v případě  $(\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k) > 0$ , a na neaktivní část, pro kterou je  $\psi_a = 0$  v případě  $(\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k) \leq 0$ . V důsledku toho můžeme definovat rozdělení množiny slave uzlů na množiny aktivních uzlů  $\mathcal{A}_k$  a neaktivních uzlů  $\mathcal{J}_k$  pro krok  $k$  semihladké Newtonovy metody ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k &= \left\{ j \in \mathcal{J} \mid (\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k) \leq 0 \right\}, \\ \mathcal{A}_k &= \left\{ j \in \mathcal{J} \mid (\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k) > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Předpokládáme-li rozdělení (3.26) získáme z rovnice (3.25) omezení pro množinu neaktivních uzlů

$$\begin{aligned} \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - 0(\Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - c_n \Delta \tilde{g}_j^k) &= -\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + 0, \\ \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + (\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k) &= 0, \\ \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot (\underline{z}_j^k + \Delta \underline{z}_j^k) &= 0, \\ \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^{k+1} &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}_k \end{aligned}$$

a omezení pro množinu aktivních uzlů

$$\begin{aligned}\Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - 1 \left( \Delta \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k - c_n \Delta \tilde{g}_j^k \right) &= -\underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{n}_j^k \cdot \underline{z}_j^k - c_n \tilde{g}_j^k \\ c_n \Delta \tilde{g}_j^k &= -c_n \tilde{g}_j^k \\ \Delta \tilde{g}_j^k &= -\tilde{g}_j^k \quad \forall j \in \mathcal{A}_k.\end{aligned}$$

Normálové omezení pro množinu neaktivních uzlů si v další sekci spojíme s tečným omezením, abychom získali výsledné vyjádření rovnic v jednodušším tvaru. V případě normálového omezení pro množinu aktivních uzlů bude zapotřebí si vyjádřit derivaci  $\Delta \tilde{g}_j$ . Z předchozí kapitoly víme, že pro  $\tilde{g}_j$  platí vztah

$$\tilde{g}_j = -\underline{n}_j^T \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \underline{D}[j, k] \left( \underline{X}_k^{(sl)} + \underline{d}_k^{(sl)} \right) + \underline{n}_j^T \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \underline{M}[j, l] \left( \underline{X}_l^{(m)} + \underline{d}_l^{(m)} \right),$$

a tudíž pro  $\Delta \tilde{g}_j$  platí

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{g}_j &= -\underline{n}_j^T \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \underline{D}[j, k] \Delta \underline{d}_k^{(sl)} + \underline{n}_j^T \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \underline{M}[j, l] \Delta \underline{d}_l^{(m)} \\ &\quad - \Delta \underline{n}_j^T \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \underline{D}[j, k] \underline{x}_k^{(sl)} + \Delta \underline{n}_j^T \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \underline{M}[j, l] \underline{x}_l^{(m)} \\ &\quad - \underline{n}_j^T \sum_{k=1}^{n_n^{(sl)}} \Delta \underline{D}[j, k] \underline{x}_k^{(sl)} + \underline{n}_j^T \sum_{l=1}^{n_n^{(m)}} \Delta \underline{M}[j, l] \underline{x}_l^{(m)},\end{aligned}$$

kde  $j, k = 1, \dots, n_n^{(sl)}$  a  $l = 1, \dots, n_n^{(m)}$ ,  $\underline{D}[j, k] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  a  $\underline{M}[j, l] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  jsou submatice příslušných matic. Ve vztahu pro  $\Delta \tilde{g}_j$  vystupují pouze linearizace uzlové normály  $\underline{n}_j$  a mortarových matic  $\underline{D}$  a  $\underline{M}$ . Všechny uvedené linearizace máme již odvozené. Navíc pokud do  $\Delta \tilde{g}_j$  dosadíme výše rozebrané linearizace a vybereme pouze ty řádky, které odpovídají aktivní množině, dostaneme

$$\bigcup_{j=1}^{n_a} \Delta \tilde{g}_j = \underline{\tilde{S}}_{\mathcal{A}} \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}} + \underline{\tilde{M}}_{\mathcal{A}} \Delta \underline{d}_{\mathcal{M}}.$$

### 3.5 Linearizace tečné složky multiplikátorů

V soustavě nelineárních rovnic (3.6) je pro tečnu definované omezení ve tvaru

$$(z_t)_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{S}. \quad (3.27)$$

Připomeňme si, že omezení (3.27) zaručuje kontakt bez tření. Aplikujeme-li na uvedené omezení Newtonovu metodu, dostaneme pro krok  $k$  semihladké Newtonovy metody

$$\begin{aligned}(z_t)_j^{k+1} &= (z_t)_j^k + \Delta (z_t)_j \left( \underline{d}_j^k, \underline{z}_j^k \right) = 0 \\ \Delta (z_t)_j \left( \underline{d}_j^k, \underline{z}_j^k \right) &= - (z_t)_j^k \quad \forall j \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

Jelikož pro  $(z_t)_j$  platí

$$(z_t)_j = \underline{t}_j \cdot \underline{z}_j ,$$

získáme derivací  $\Delta (z_t)_j^k$  předpis ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta \underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{t}_j^k \cdot \Delta \underline{z}_j^k &= -\underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^k , \\ \Delta \underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{t}_j^k \cdot (\underline{z}_j^k + \Delta \underline{z}_j^k) &= 0 , \\ \Delta \underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^k + \underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^{k+1} &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{S} , \end{aligned} \tag{3.28}$$

který budeme řešit v každém kroku Newtonovy metody.

Předpis (3.28) si vyjádříme ve tvaru vhodnějším pro implementaci v algoritmu a to ve tvaru maticovém. Nejprve si zadefinujeme vektor multiplikátorů  $\underline{z}_j$

$$\mathbb{R}^{2|\mathcal{S}|} \ni \underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_{|\mathcal{S}|} \end{bmatrix} ,$$

kde

$$\mathbb{R}^2 \ni \underline{z}_j = (z_n)_j \underline{n}_j + (z_t)_j \underline{t}_j ,$$

tzn. každý multiplikátor  $\underline{z}_j$  můžeme rozložit na tečnou a normálovou složku, přičemž každá z nich má svou  $x$ -ovou a  $y$ -ovou část. Pro tečnou složku platí

$$\mathbb{R}^{|\mathcal{S}|} \ni \underline{z}_t = \begin{bmatrix} (z_t)_1 \\ \vdots \\ (z_t)_{|\mathcal{S}|} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}(\underline{d}) \cdot \underline{z} , \quad \underline{\underline{T}}(\underline{d}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}| \times 2|\mathcal{S}|} ,$$

kde  $\underline{\underline{T}}(\underline{d})$  je matice tečen ve tvaru

$$\underline{\underline{T}}(\underline{d}) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{j,x}(d_x) & t_{j,x}(d_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} .$$

V každém kroku  $k$  provedeme rozdělení množiny  $\mathcal{S}$  na množinu  $\mathcal{A}_k$  a  $\mathcal{J}_k$  podle předpisu (3.26). V důsledku toho stačí rovnici (3.28) definovat pro množinu  $\mathcal{A}_k$ . Předpis pro neaktivní množinu  $\mathcal{J}_k$  sjednotíme s předpisem omezení pro normálu.

Vezměme si první člen součtu z rovnice (3.28)  $\Delta \underline{t}_j^k \cdot \underline{z}_j^k$ , kde  $\Delta \underline{t}_j$  je popsáno v sekci „Linearizace normálového a tečného vektoru“. Maticové vyjádření je následující

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{T}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d})}{\partial \underline{d}} \underline{z} &= \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t_{j,x}(d_x) & \Delta t_{j,y}(d_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{j,x} \\ z_{j,y} \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{p}_{t,j,x} \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}} z_{j,x} + \underline{p}_{t,j,y} \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}} z_{j,y} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ (\underline{p}_{t,j,x} z_{j,x} + \underline{p}_{t,j,y} z_{j,y}) \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ (\underline{p}_{t,j,x} z_{j,x} + \underline{p}_{t,j,y} z_{j,y}) \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \underline{\tilde{F}}_{\mathcal{A}_k} \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}},
\end{aligned}$$

kde  $\underline{p}_{t,j,x}, \underline{p}_{t,j,y} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{S}|}$  jsou řádkové vektory z matice  $\underline{P}_t$  odpovídající členům  $\Delta t_{j,x}$  a  $\Delta t_{j,y}$ ,  $\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{A}_k} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_k| \times 2|\mathcal{S}|}$ .

Maticové vyjádření druhého členu součtu bude jednodušší. Stačí si vzít výše uvedenou matici tečen  $\underline{T}(\underline{d})$  a vybrat pouze ty řádky, které vyhovují předpisu aktivní množiny  $\mathcal{A}_k$ . To stejné provedeme s vektorem  $\underline{z}_{\mathcal{A}_k}^{k+1}$ . Získáme druhý člen ve tvaru

$$\underline{T}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}) \underline{z}_{\mathcal{A}_k}^{k+1} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{j,x}(d_x) & t_{j,y}(d_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{j,x} \\ z_{j,y} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\underline{T}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_k| \times 2|\mathcal{S}|}, \underline{z}_{\mathcal{A}_k}^{k+1} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_k|}.$$

Výsledné maticové vyjádření rovnice (3.28) pro množinu aktivních bodů je

$$\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{A}_k} \Delta \underline{d}_{\mathcal{S}}^k + \underline{T}_{\mathcal{A}_k} \underline{z}_{\mathcal{A}_k}^{k+1} = \underline{0}. \quad (3.29)$$

Pro množinu neaktivních bodů můžeme omezení pro tečnu (podmínka pro tření) (3.28) sjednotit s omezením pro normálu (67A) a vytvořit tak lineární kontaktní podmínku

$$\underline{z}_j^{k+1} = \underline{0} \quad \forall j \in \mathcal{J}_k.$$

Příslušný maticový zápis kontaktní podmínky bude

$$\underline{I}_{\mathcal{J}_k} \underline{z}_j^{k+1} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{j,x} \\ z_{j,y} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

kde  $\underline{\underline{I}}_{\mathcal{J}_k} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{J}| \times 2|\mathcal{J}|}$  je jednotková matice daného rozměru a  $\underline{z}_j^{k+1} \in \mathbb{R}^{2|\mathcal{J}|}$  aktualizovaný vektor multiplikátorů.

### 3.6 Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Dostali jsme se do bodu, kdy máme odvozené všechny potřebné derivace pro vyjádření výsledné soustavy lineárních rovnic. Nyní si pomocí stručného maticového zápisu ukážeme, jakým způsobem přejdeme ze soustavy nelineárních rovnic (3.6) na soustavu lineárních rovnic.

Pro Newtonovu metodu platí

$$\begin{aligned} \underline{F}(\underline{x}) &= \underline{0}, \\ \underline{x}^{k+1} &= \underline{x}^k + \Delta \underline{x}^k = \underline{x}^k - \left[ \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^k) \right]^{-1} \underline{F}(\underline{x}^k). \end{aligned}$$

Soustavě (3.6) odpovídá po úpravě zápis

$$\underline{F} \left( \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} \underline{d} - \underline{f} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{\underline{M}}^\top(\underline{d}) \underline{z} \\ \underline{\underline{D}}^\top(\underline{d}) \underline{z} \end{bmatrix} \\ \underline{z}_{\mathcal{J}_k} \\ \tilde{g}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}) \\ \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}) \cdot \underline{z} \end{bmatrix} = \underline{0},$$

a proto vektor  $\Delta \underline{x}^k = \begin{bmatrix} \Delta \underline{d}^k \\ \Delta \underline{z}^k \end{bmatrix}$  řeší soustavu

$$\underline{\underline{A}}_{\text{NEWTON}}^* \begin{bmatrix} \Delta \underline{d}^k \\ \Delta \underline{z}^k \end{bmatrix} = \underline{b}_{\text{NEWTON}}^*,$$

kde

$$\underline{\underline{A}}_{\text{NEWTON}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -\left( \frac{\partial \underline{\underline{M}}^\top}{\partial \underline{d}} \right) (\underline{d}^k) \underline{z}^k \\ \left( \frac{\partial \underline{\underline{D}}^\top}{\partial \underline{d}} \right) (\underline{d}^k) \underline{z}^k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{\underline{M}}^\top(\underline{d}^k) \\ \underline{\underline{D}}^\top(\underline{d}^k) \end{bmatrix} \\ \underline{0} & \text{permute}_k \left( \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_{|\mathcal{J}_k|} & \underline{0}_{|\mathcal{A}_k|} \end{bmatrix} \right) \\ \frac{\partial \tilde{g}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}^k)}{\partial \underline{d}} & \underline{0} \\ \frac{\partial \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}_k}(\underline{d}^k) \underline{z}_i^k}{\partial \underline{d}} & \text{permute}_k \left( \begin{bmatrix} \underline{0}_{|\mathcal{J}_k|} & \underline{\underline{T}}_{|\mathcal{A}_k|}(\underline{d}^k) \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix}$$

a



$$\underline{\mathbf{b}}_{NEWTON}^* = - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{d}}^k - \underline{\mathbf{f}} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{M}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \\ \underline{\mathbf{D}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{z}}_{\mathcal{J}_k}^k \\ \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_k}(\underline{\mathbf{d}}^k) \\ \underline{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}_k}(\underline{\mathbf{d}}^k) \cdot \underline{\mathbf{z}}^k \end{bmatrix} .$$

Využijeme toho, že pro druhý blokový řádek platí  $\underline{\mathbf{z}}_{\mathcal{J}_k}^k = \underline{\mathbf{0}}_{2\mathcal{J}_k}$ , pro třetí je  $\Delta \underline{\mathbf{0}} \underline{\mathbf{z}}^k = \underline{\mathbf{0}}(\underline{\mathbf{z}}^k + \Delta \underline{\mathbf{z}}^k) = \underline{\mathbf{0}} \underline{\mathbf{z}}^{k+1}$  a čtvrtý lze upravit na tvar (3.29), dostaneme

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{NEWTON} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{d}}^k \\ \underline{\mathbf{z}}^{k+1} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{b}}_{NEWTON} , \quad (3.30)$$

kde

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{NEWTON} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{M}}^\top}{\partial \underline{\mathbf{d}}}\right)(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \\ \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{D}}^\top}{\partial \underline{\mathbf{d}}}\right)(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{M}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \\ \underline{\mathbf{D}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{0}} & \text{permute}_k \left( \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_{|\mathcal{J}_k|} & \underline{\mathbf{0}}_{|\mathcal{A}_k|} \end{bmatrix} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{\mathcal{A}_k}(\underline{\mathbf{d}}^k)}{\partial \underline{\mathbf{d}}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}_k}(\underline{\mathbf{d}}^k)}{\partial \underline{\mathbf{d}}} \underline{\mathbf{z}}^k & \text{permute}_k \left( \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}}_{|\mathcal{J}_k|} & \underline{\mathbf{T}}_{|\mathcal{A}_k|}(\underline{\mathbf{d}}^k) \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix}$$

a

$$\underline{\mathbf{b}}_{NEWTON}^* = - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{d}}^k - \underline{\mathbf{f}} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{M}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \\ \underline{\mathbf{D}}^\top(\underline{\mathbf{d}}^k) \underline{\mathbf{z}}^k \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{0}}_{2\mathcal{J}_k} \\ \mathbf{g}_{\mathcal{A}_k}(\underline{\mathbf{d}}^k) \\ \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{A}_k} \end{bmatrix} .$$

Výše uvedenému maticovému zápisu odpovídá detailnější blokový zápis

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{A}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{A}} & -\underline{\underline{M}}_{\mathcal{I}}^{\top} & -\underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}}^{\top} \\ \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{A}} & \underline{\underline{D}}_{\mathcal{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_{\mathcal{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}} & \underline{\underline{S}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{S}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} \\ \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{N}} \\ \underline{\underline{r}}_{\mathcal{M}} \\ \underline{\underline{r}}_{\mathcal{I}} \\ \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{g}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

kde

$$\underline{\underline{K}}_{\#\$} = \underline{\underline{K}}_{\#\$} + \underline{\underline{C}}_{\#\$}, \quad \#, \$ \in \{\mathcal{M}, \mathcal{I}, \mathcal{A}\},$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ -\left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^{\top}}{\partial \underline{\underline{d}}}\right) (\underline{\underline{d}}^k) \underline{\underline{z}}^k \\ \left(\frac{\partial \underline{\underline{D}}^{\top}}{\partial \underline{\underline{d}}}\right) (\underline{\underline{d}}^k) \underline{\underline{z}}^k \end{bmatrix}.$$

Poznamenejme, že matici  $\underline{\underline{C}}$  jsme získali na základě vztahů (3.16), (3.23), kde  $\left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^{\top}}{\partial \underline{\underline{d}}}\right) (\underline{\underline{d}}^k) = \Delta \underline{\underline{M}}^{\top}$  a  $\left(\frac{\partial \underline{\underline{D}}^{\top}}{\partial \underline{\underline{d}}}\right) (\underline{\underline{d}}^k) = \Delta \underline{\underline{D}}^{\top}$ .

Soustavu lineárních rovnic (3.31) můžeme dále zredukovat o multiplikátory  $\underline{\underline{z}}$  a získat tak soustavu menšího rozměru. Rozepišme si tedy ty řádky soustavy (3.31), ve kterých figurují multiplikátory  $\underline{\underline{z}}$ . Druhému řádku soustavy odpovídá zápis

$$\underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} - \underline{\underline{M}}_{\mathcal{I}}^{\top} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} - \underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = -\underline{\underline{r}}_{\mathcal{M}},$$

třetímu řádku zápis

$$\underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} + \underline{\underline{D}}_{\mathcal{I}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{0}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = -\underline{\underline{r}}_{\mathcal{I}},$$

čtvrtému řádku

$$\underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} + \underline{\underline{0}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = -\underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}},$$

pátému řádku

$$\underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} + \underline{\underline{I}}_{\mathcal{I}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{0}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = \underline{\underline{0}}$$

a sedmému řádku

$$\underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} + \underline{\underline{0}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = \underline{\underline{0}}.$$

Pátý řádek soustavy nám vypadne díky tomu, že platí  $\underline{\underline{z}}_j^{k+1} = \underline{\underline{0}} \quad \forall j \in \mathcal{I}$ . Tudíž členy obsahující multiplikátory  $\underline{\underline{z}}_{\mathcal{I}}$  jsou rovny nule. V důsledku toho nám zbývá si vyjádřit pouze multiplikátory  $\underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}}$ . Ty si vyjádříme ze čtvrtého řádku soustavy. Pro  $\underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}}$  platí

$$\underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}} = \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} (-\underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} - \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}}).$$

Využili jsme přitom faktu, že matice  $\underline{\underline{D}}$  je diagonální, a proto výpočet její inverze bude pro nás mnohem snazší než kterékoliv jiné matice vystupující v soustavě (3.31). Dosadíme-li vyjádřené  $\underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}}$  do druhého řádku, dostaneme

$$\underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} - \\ - \underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} (-\underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} - \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}}) = -\underline{\underline{r}}_{\mathcal{M}},$$

kde

$$\underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} = \left[ \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}} \right]^{\top} = \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top}.$$

Po úpravě obdržíme

$$\left( \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \left( \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \\ + \left( \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{I}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \left( \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{A}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} = -\underline{\underline{r}}_{\mathcal{M}} - \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}}.$$

Dosadíme-li  $\underline{\underline{z}}_{\mathcal{A}}$  do sedmého řádku, dostaneme

$$\underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \underline{\underline{0}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} + \\ + \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} (-\underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} - \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} - \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}}) = \underline{\underline{0}}$$

a po úpravě

$$\left( \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} + \left( \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} + \\ + \left( \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} - \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} + \left( \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} - \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \right) \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} = -\underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}}.$$

Výsledný maticový zápis je roven

$$\underline{\underline{A}}_{\text{NEWTON}}^d \begin{bmatrix} \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{N}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{M}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{I}} \\ \Delta \underline{\underline{d}}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{b}}_{\text{NEWTON}}^d, \quad (3.32)$$

kde

$$\underline{\underline{A}}_{\text{NEWTON}}^d = \\ = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{N}\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{I}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{M}\mathcal{A}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{N}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{M}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \underline{\underline{K}}_{\mathcal{I}\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_{\mathcal{A}} & \underline{\underline{S}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{S}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{N}} & \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{M}} & \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} - \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} - \underline{\underline{F}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \end{bmatrix}$$

a

$$\underline{\underline{b}}_{\text{NEWTON}}^d = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{N}} \\ \underline{\underline{r}}_{\mathcal{M}} + \hat{\underline{\underline{M}}}_{\mathcal{A}}^{\top} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{r}}_{\mathcal{I}} \\ \underline{\underline{g}}_{\mathcal{A}} \\ \underline{\underline{T}}_{\mathcal{A}} \underline{\underline{D}}_{\mathcal{A}}^{-1} \underline{\underline{r}}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}.$$

### 3.7 Algoritmus

Algoritmus pro řešení zformulované kontaktní úlohy můžeme zapsat následovně

1. V kroku  $k = 0$  nastavíme počáteční hodnotu vektoru  $\begin{bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{d}}^0 \\ \underline{\mathbf{z}}^0 \end{bmatrix}$ .
2. Určíme  $\mathcal{A}_0$  a  $\mathcal{J}_0$ , přitom musíme dbát na to, že platí  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{J}_0 = \mathcal{S}$  a  $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{J}_0 = \emptyset$ .
3. Nalezneme primárně-duální dvojici  $(\Delta \underline{\mathbf{d}}^k, \underline{\mathbf{z}}^{k+1})$  vyřešením soustavy lineárních rovnic (3.30), resp. (3.31).
4. Aktualizujeme  $\underline{\mathbf{d}}^{k+1} = \underline{\mathbf{d}}^k + \Delta \underline{\mathbf{d}}^k$ .
5. Určíme  $\mathcal{A}_{k+1}$  a  $\mathcal{J}_{k+1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{k+1} &= \left\{ j \in \mathcal{S} \mid \left( \underline{\mathbf{n}}_j^{k+1} \cdot \underline{\mathbf{z}}_j^{k+1} - c_n \tilde{g}_j^{k+1} \right) \leq 0 \right\} , \\ \mathcal{A}_{k+1} &= \left\{ j \in \mathcal{S} \mid \left( \underline{\mathbf{n}}_j^{k+1} \cdot \underline{\mathbf{z}}_j^{k+1} - c_n \tilde{g}_j^{k+1} \right) > 0 \right\} . \end{aligned}$$

6. Pokud  $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k$ ,  $\mathcal{J}_{k+1} = \mathcal{J}_k$  a  $\|\underline{\mathbf{r}}_{tot}\| \leq \varepsilon_r$ , pak zastav výpočet, jinak přičti  $k = k + 1$  a pokračuj od 3. kroku.

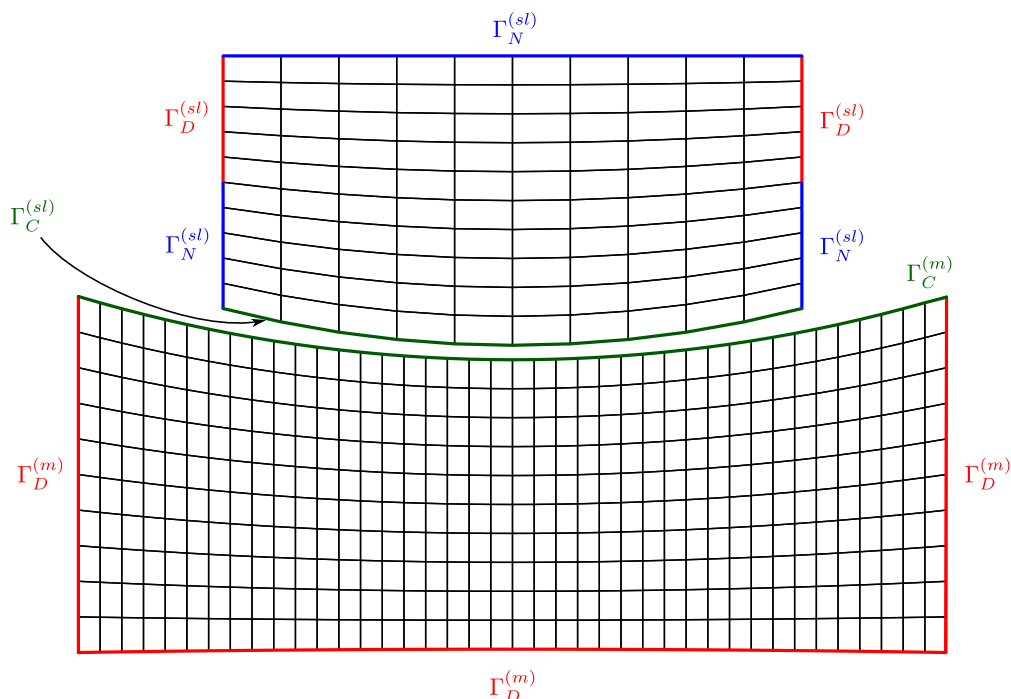
$\varepsilon_r$  zde představuje přesnost výpočtu a vektor  $\underline{\mathbf{r}}_{tot}$  zahrnuje vektor reziduální síly  $\underline{\mathbf{r}}$  a reziduální kontaktní omezení, resp. rozdíl pravých stran předchozího a nového kroku *semi-hladké* Newtonovy metody.

Lze snadno vidět, že nalezení aktivní množiny a další typy nelinearit jsou vyřešeny uvnitř jednoho Newtonova kroku. To pak vyžaduje aktualizovat aktivní a neaktivní množinu po každém semihladkém Newtonově kroku.

## Kapitola 4

# Numerické experimenty

Sestavení jednotlivých matic potřebných k vyřešení kontaktní úlohy pomocí *semihladké* Newtonovy úlohy jsme implementovali v programovacím jazyce C++, ve kterém jsme využili mex rozhraní, abychom byli schopni tyto kódy spustit v MATLABu. Samotný algoritmus jsme napsali v MATLABu a zařadili jsme ho do již existující knihovny MatSol, která vznikla na katedře 470 na Vysoké Škole Báňské – Technické Univerzitě Ostrava.



Obrázek 4.1: Testovací úloha

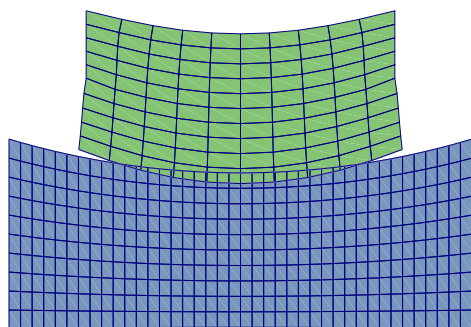
*Semihladkou* Newtonovu metodu jsme otestovali na úloze, ve které bylo slave těleso diskretizováno na  $10 \times 10$  prvků a master těleso na  $20 \times 10$  prvků. Po stranách slave tělesa (v jejich horních polovinách) byla předepsána Dirichletova podmínka. U master tělesa byla Dirichletova podmínka stanovena na její spodní hraně a bočních stranách. V ukončovací podmínce jsme zvolili přesnost  $\varepsilon_r = 10^{-9}$ .

$k$	<i>semihladká</i> Newtonova metoda – Algoritmus č.1	<i>semihladká</i> Newtonova metoda – Algoritmus č.2	Pevný bod
1	$6,13 \cdot 10^1$	$6,13 \cdot 10^1$	$6,00 \cdot 10^4$
2	$6,53 \cdot 10^{-1}$	$6,53 \cdot 10^{-1}$	$3,30 \cdot 10^0$
3	$5,62 \cdot 10^{-4}$	$5,62 \cdot 10^{-4}$	$2,97 \cdot 10^0$
4	$3,17 \cdot 10^{-7}$	$3,17 \cdot 10^{-7}$	$3,30 \cdot 10^{-3}$
5	$8,08 \cdot 10^{-10}$	$7,85 \cdot 10^{-10}$	$3,13 \cdot 10^{-4}$
6			$7,38 \cdot 10^{-6}$
7			$4,75 \cdot 10^{-7}$
8			$1,92 \cdot 10^{-8}$
9			$1,01 \cdot 10^{-9}$
10			$4,54 \cdot 10^{-11}$

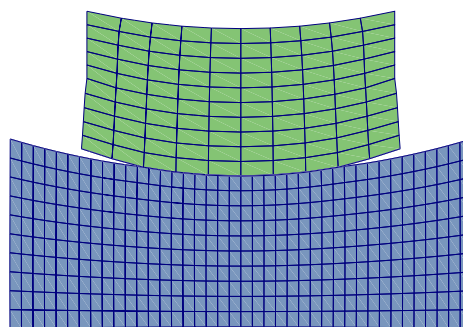
Tabulka 4.1: Výpis  $\|\underline{r}_{tot}\|$  v každém kroce jednotlivých algoritmů.

Pomocí této připravené kontaktní úlohy jsme porovnávali dvě modifikace *semihladké* Newtonovy metody (první modifikace využívá soustavu (3.30) a druhá modifikace soustavu (3.32)) společně s pevně bodovou úlohou. V každém kroce jednotlivých algoritmů jsme vypisovali hodnotu  $\|\underline{r}_{tot}\|$ , kterou jsme používali pro ukončovací kritérium. Vypsane hodnoty jsme uvedli v tabulce 4.1. Je zapotřebí uvést, že v případě obou modifikací *semihladké* Newtonovy metody jsme hodnoty  $\|\underline{r}_{tot}\|$  začali vypisovat od okamžiku, ve kterém se tělesa master a slave dostali do kontaktu. To jsme provedli z toho důvodu, abychom mohli lépe porovnat jednotlivé výsledky. Společně s hodnotami  $\|\underline{r}_{tot}\|$  zde ještě uvádíme grafické výstupy *semihladké* Newtonovy metody (viz další strana – zelenou barvou je znázorněno slave těleso, modrou barvou master těleso.). Narozdíl od tabulky, ve které jsme neuvedli první dvě iterace, kdy tělesa nebyla v kontaktu, jsme zobrazili grafické výstupy pro všechny kroky. Z prvního obrázku 4.2a je vidět proniknutí těles při hledání aktivní množiny uzlů  $\mathcal{A}_k$ . Ve druhém kroce je proniknutí téměř minimální a od třetího kroku jsou tělesa vyhodnocena, že se nacházejí v kontaktu.

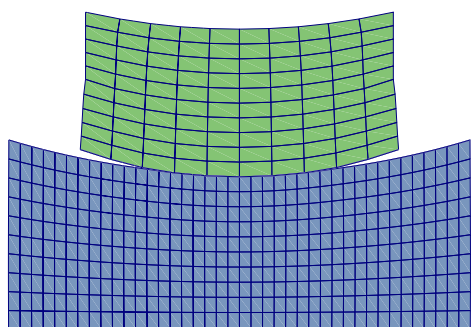
Došli jsme tedy k závěru, že řešení kontaktních úloh pomocí *semihladké* Newtonovy metody má pro nás značný význam nejenom díky možnosti formulace kontaktní úlohy pomocí nehladké funkce, ale také díky počtu iterací potřebných k dosažení dané přesnosti.



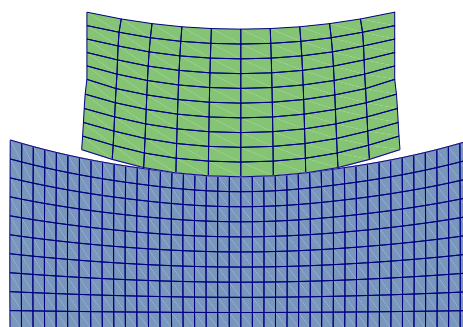
(a)  $k = 1$ , tělesa nejsou v kontaktu



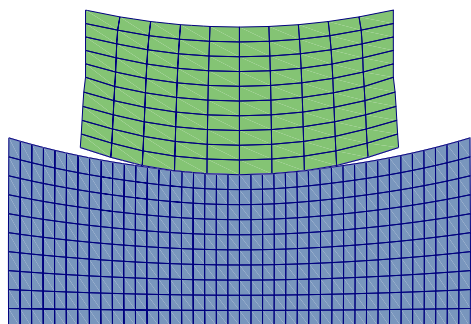
(b)  $k = 2$ , tělesa nejsou v kontaktu



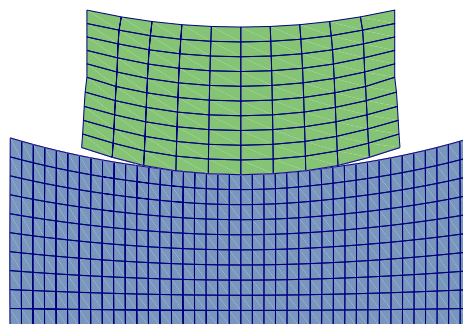
(c)  $k = 3$ , tělesa jsou v kontaktu



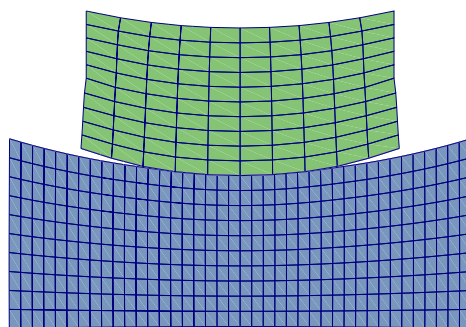
(d)  $k = 4$ , tělesa jsou v kontaktu



(e)  $k = 5$ , tělesa jsou v kontaktu



(f)  $k = 6$ , tělesa jsou v kontaktu



(g)  $k = 2$ , tělesa jsou v kontaktu

Obrázek 4.2: Grafické výstupy *semihladké* Newtonovy metody

# Závěr

V rámci diplomové práce jsme provedli odvození a následnou implementaci *semihladké* Newtonovy metody do již existující knihovny MatSol. V celém textu jsme se snažili, pokud to bylo možné, co nejsrozumitelněji provádět jednotlivé kroky. Bohužel ne vše šlo přehledně vyjádřit, např. vyjádření třírozměrných matic  $\underline{\underline{D}}$  a  $\underline{\underline{M}}$ . V takových případech jsme se spoléhali na jistou představivost čtenáře, jelikož snaha o podrobné vyjádření by textu spíše uškodila než by mu pomohla. V předchozí kapitole týkající se numerických experimentů jsme se přesvědčili, že opravdu nebylo zapotřebí testovat *semihladkou* Newtonovu metodu na dynamické úloze, protože jsme byli schopni vytvořit stacionární úlohu, ve které byla zaručena pozitivní definitivnost matice soustavy, a tudíž jsme byli schopni danou úlohu řešit až do zdárného konce. Na testovacím příkladě jsme si také mohli všimnout, že narozdíl od pevně bodové úlohy, ve které reziduální chyba klesala v každém kroce o jeden řád, jsme v případě algoritmu Newtonova typu dosáhli poklesu reziduální chyby o tři řády v každém jeho kroku.

V závěru bychom také chtěli uvést dvě chyby, kterých jsme se dopustili během implementace. První chyba spočívala ve výpočtu derivací koncových bodů segmentů  $\Delta \zeta_{\#}^{(sl)}$ ,  $\# \in \{a, b\}$ . Pro výpočet zmíněné derivace jsme používali projekci špatného bodu  $x_{\#}^{(m)}$  z kontaktního povrchu master na kontaktní povrch slave. Bylo to způsobeno tím, že pořadí koncových bodů elementů v referenční konfiguraci kontaktního povrchu bylo odlišné od pořadí koncových bodů segmentů stejného povrchu. Druhá chyba také souvisela s výpočtem derivací koncových bodů segmentů. Jednalo se o tu část, kdy rozhodujeme, jestli  $\zeta_{\#}^{(sl)} \in \{-1, 1\}$  nebo  $\zeta_{\#}^{(m)} \in \{-1, 1\}$ . Zde si je nutné uvědomit, že výpočty probíhají s určitou přesností, a proto je zapotřebí při rozhodování určit jistou toleranci, díky které bude bod  $\zeta_{\#}^{(sl)}$  nebo  $\zeta_{\#}^{(m)}$  vyhodnocen jako  $-1$  nebo  $1$ . Uvedené chyby jsme nemohli dlouho odhalit, protože pevně bodová úloha byla plně funkční, ale v případě algoritmu Newtonova typu vznikaly jisté nesymetrie. V důsledku toho bychom chtěli čtenáře upozornit, aby byl při implementaci dostatečně pečlivý a vyvaroval se tak možným chybám.

Závěrem bych chtěl diplomovou práci zhodnotit z mého úhlu pohledu. V rámci diplomové práce jsem dostal možnost nahlédnout do problematiky kontaktních úloh, které jsou v docela hojném počtu řešeny v rámci katedry 470. Doposud byli kontaktní úlohy řešeny na základě přístupu minimalizace kvadratického funkcionálu s rovnostními omezeními a nerovnostními omezeními speciálního tvaru. Bohužel úlohy řešené na základě zmíněného přístupu jsou těžce porovnatelné s úlohami, které se běžně řeší v zahraničí, protože kontaktní úlohy řešené na zahraničních univerzitách využívají aplikaci *semihladké* Newtonovy metody, resp. v rámci kontaktních úloh převádějí nerovnostní vazby na rovnostní vazby, ve kterých se objevují nehladké funkce. Implementací *semihladké* Newtonovy metody do knihovny MatSol byla otevřena brána pro porovnávání efektivnosti kontaktních úloh vytvořených na katedře 470 naší univerzity a úloh vytvořených



na zahraničních univerzitách. Je potřeba uvést, že v rámci diplomové práce byla sestavena pouze stacionární kontaktní úloha, na které byla otestována funkčnost naimplementované *semihladké* Newtonovy metody. Pro rozsáhlé porovnávání se zahraničními algoritmy je ale ještě zapotřebí naimplementovat dynamický 2D přístup a to vše ještě ve 3D problematice. V důsledku toho bylo také v úvodu řečeno, že celý text diplomové práce tvoří úvod (bránu) do problematiky kontaktních úloh využívajících rovnostních vazeb s nehladkými funkcemi.

# Literatura

- [1] Vít Vondrák a Lukáš Pospíšil: Numerické metody I. 2011. [cit. 2015-02-15]. Dostupné z: <[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke\\_metody.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf)>
- [2] Kristina Motyčková: *The Semi-Smooth Newton Method for Solving 2D and 3D contact Problems with Tresca and Coulomb Friction*. Ostrava, 2015. Disertační práce. VŠB-TUO. Vedoucí práce doc. RNDr. Radek Kučera, Ph.D. [cit. 2015-02-15].
- [3] Alexander Popp, Michael W. Gee a Wolfgang A. Wall: A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [online]. 2009-09-10, vol. 79, issue 11, s. 1354-1391 [cit. 2015-01-10]. DOI: 10.1002/nme.2614. Dostupné z: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.2614>>
- [4] Petr Haškovec: *Contact problems with respect to the formation and propagation of heat*. Ostrava, 2014. Diplomová práce. Vedoucí práce Ing. Oldřich Vlach, Ph.D. [cit. 2015-04-06]
- [5] Peter Wriggers: *Computational Contact Mechanics*. Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons, c2002, xxii, 441 p. ISBN 0471496804.